

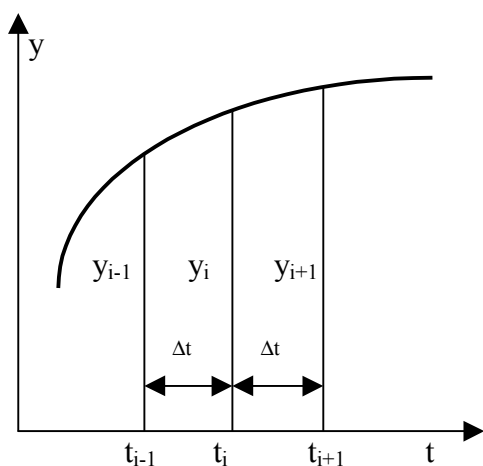
## 7. METODY PŘÍMÉ INTEGRACE DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

Ne vždy lze diferenciální pohybové rovnice řešit v uzavřeném tvaru. V takovém případě se používají metody přímé integrace diferenciálních rovnic, které rozdělujeme do dvou skupin.

1. *Explicitní metody*, u nichž jsou odezvy soustav vyjádřeny pomocí dříve určených hodnot přemístění, rychlostí a zrychlení. Z těchto metod si v dalším uvedeme *metodu centrálních diferencí*, *dvoukrokovou metodu* a *metodu Runge-Kutta*.

2. *implicitní metody*, u nichž jsou diferenciální rovnice kombinovány s rovnicemi pohybu a přemístění je určeno přímo. Z nich si probereme *metodu Newmarkovu*.

### 7.1 Metoda centrálních diferencí



Obr. 7.1

Při této metodě pracujeme místo s derivacemi s konečnými diferencemi

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Jedná-li se o spojitou křivku s malou změnou směrnice je řešení dosti přesné i při větších časových intervalech.

Uvažujme nyní křivku, která prochází třemi body:

$(y_{i-1}, t_{i-1}), (y_i, t_i), (y_{i+1}, t_{i+1})$ , jak naznačeno na

obr.7.1. Pro rychlost v čase  $t_i$  lze psát:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=t_i} \doteq \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta t} \quad (7.1.1)$$

Podobně můžeme psát pro zrychlení v čase  $t_i$ :

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_{t=t_i} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_i+\frac{\Delta t}{2}} - \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_i-\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta t} = \frac{\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t} - \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta t^2} \quad (7.1.2)$$

Rov.(7.1.1) a (7.1.2) dosadíme do pohybové rovnice

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}_t$$

která tak přejde na tvar

$$\mathbf{M} \frac{\mathbf{q}_{t+\Delta t} - 2\mathbf{q}_t + \mathbf{q}_{t-\Delta t}}{\Delta t^2} + \mathbf{B} \frac{\mathbf{q}_{t+\Delta t} - \mathbf{q}_{t-\Delta t}}{2\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{q}_t = \mathbf{Q}_t \quad (7.1.3)$$

Tuto rovnici lze upravit na tvar

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{B}\right)\mathbf{q}_{t+\Delta t} = \mathbf{Q}_t - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right)\mathbf{q}_t - \left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{B}\right)\mathbf{q}_{t-\Delta t} \quad (7.1.4)$$

Nebo označíme-li

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{B} \quad \bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}_t - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right)\mathbf{q}_t - \left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{B}\right)\mathbf{q}_{t-\Delta t} \quad (7.1.5)$$

Můžeme vypočítat

$$\mathbf{q}_{t+\Delta t} = \mathbf{A}^{-1}\bar{\mathbf{Q}} \quad (7.1.6)$$

Tak můžeme určit výchylku v čase  $t + \Delta t$  a pomocí ní i rychlost a zrychlení a to pomocí výchylek v čase  $t$  a  $t - \Delta t$ . V dalším kroku položíme  $t = t + \Delta t$ ,  $\mathbf{q}_{t-\Delta t} = \mathbf{q}_t$ ,  $\mathbf{q}_t = \mathbf{q}_{t+\Delta t}$  a určíme další výchylky a zrychlení.

Určitou nevýhodou této metody je to, že na počátku řešení neznáme dvě předchozí výchylky a musíme celý proces zahájit startovacím algoritmem. Rov.(7.1.1) a (7.1.2) pro rychlost a zrychlení upravíme na tvar

$$\begin{aligned} 2\dot{\mathbf{q}}_0\Delta t &= \mathbf{q}_{0+\Delta t} - \mathbf{q}_{0-\Delta t} \\ \ddot{\mathbf{q}}\Delta t^2 &= \mathbf{q}_{0+\Delta t} + 2\mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_{0-\Delta t} \end{aligned}$$

V těchto rovnicích známe pouze  $\mathbf{q}_0$  a  $\dot{\mathbf{q}}_0$ , které jsou dány počátečními podmínkami.  $\mathbf{q}_{0-\Delta t}$  lze z obou rovnic vyloučit, čímž po úpravě dostaneme:

$$\mathbf{q}_{0+\Delta t} = \mathbf{q}_0 + \dot{\mathbf{q}}_0\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{q}}_0\Delta t^2$$

Zrychlení  $\ddot{\mathbf{q}}_0$  určíme z pohybové rovnice

$$\ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}_0 - \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_0 - \mathbf{K}\mathbf{q}_0$$

Dosazením do předchozí rovnice můžeme vypočítat

$$\mathbf{q}_{0+\Delta t} = \mathbf{q}_0 + \dot{\mathbf{q}}_0\Delta t + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}_0 - \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_0 - \mathbf{K}\mathbf{q}_0 \frac{\Delta t^2}{2} \quad (7.1.7)$$

Další výpočet pokračuje původním algoritmem.

Chyba při této metodě je řádu  $\Delta t^2$ . Pro stabilitu numerického řešení je však zapotřebí, aby časový interval byl zvolen menší než  $T_{min}/30$ , čili

$$\Delta t \leq \frac{0,2}{\Omega_{max}} \quad (7.1.8)$$

To znamená, že časový krok je velmi malý, u tuhých soustav mnohdy řádově až  $10^{-10}$ s, takže výpočet odezvy v určitém čase vyžaduje velké množství kroků a výpočet trvá dlouho.

Algoritmus této metody je však přehledný a metoda sama je podkladem řady jiných metod.

## 7.2 Dvoukroková iterace

Pohybovou rovnici převedeme do přírůstkového tvaru

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{q}} = \Delta\mathbf{Q}_t - \mathbf{K}\Delta\mathbf{q}_t - \mathbf{B}\Delta\dot{\mathbf{q}} \quad (7.2.1)$$

V *prvním iteračním cyklu* určíme přírůstky rychlosti a přemístění z následujících vztahů:

V prvním časovém kroku

$$\Delta\dot{\mathbf{q}}_t = \Delta t\ddot{\mathbf{q}}_{t-\Delta t} \quad (7.2.2)$$

V ostatních časových krocích

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\mathbf{q}}_t &= 2\Delta t\ddot{\mathbf{q}}_{t-\Delta t} - \Delta\dot{\mathbf{q}}_{t-\Delta t} \\ \dot{\mathbf{q}}_t &= \dot{\mathbf{q}}_{t-\Delta t} + \Delta\dot{\mathbf{q}}_t \\ \Delta\mathbf{q}_t &= \frac{\Delta t}{2}(\dot{\mathbf{q}}_{t-\Delta t} + \dot{\mathbf{q}}_t) \end{aligned} \quad (7.2.3)$$

Přírůstek zrychlení určíme dosazením rov.(7.2.2) a (7.2.3) do rov.(7.2.1):

$$\begin{aligned} \Delta\ddot{\mathbf{q}}_t &= \mathbf{M}^{-1}(\Delta\mathbf{Q}_t - \mathbf{K}\Delta\mathbf{q}_t - \mathbf{B}\Delta\dot{\mathbf{q}}_t) \\ \ddot{\mathbf{q}}_t &= \ddot{\mathbf{q}}_{t-\Delta t} + \Delta\ddot{\mathbf{q}}_t \end{aligned} \quad (7.2.4)$$

V *druhém iteračním cyklu* se přírůstky rychlosti a přemístění upřesní pomocí vztahů:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\mathbf{q}}_t &= \frac{\Delta t}{2}(\ddot{\mathbf{q}}_{t-\Delta t} + \ddot{\mathbf{q}}_t) \\ \dot{\mathbf{q}}_t &= \dot{\mathbf{q}}_{t-\Delta t} + \Delta\dot{\mathbf{q}}_t \\ \Delta\mathbf{q}_t &= \frac{\Delta t}{2}(\dot{\mathbf{q}}_{t-\Delta t} + \dot{\mathbf{q}}_t) \end{aligned} \quad (7.2.5)$$

Výrazy dané rov.(7.2.5) se dosadí do rov.(7.2.4) a určí se upřesněná hodnota přírůstku zrychlení a hodnota zrychlení.

## 7.3 Metoda Runge-Kutta

Metody Runge-Kutta patří mezi jednokrokové metody a mohou být libovolného řádu. Při řešení budeme pracovat se *stavovými veličinami*, jimiž jsou přemístění a rychlost, které můžeme znázornit stavovým vektorem

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$$

Pohybovou rovnici soustavy přepíšeme na tvar

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}(t)$$

K této rovnici připojíme triviální rovnici identity

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}$$

Obě rovnice lze zapsat ve tvaru

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}(t) \end{bmatrix} \quad (7.3.1)$$

Tuto rovnici lze zapsat také následujícím způsobem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{D}\mathbf{x} + \mathbf{Q}^*(t)$$

nebo ještě schematictěji

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) \quad (7.3.2)$$

Pro jednoduchost psaní budeme uvažovat mechanickou soustavu s jedním stupněm volnosti. Získané výsledky lze převést do maticové formy a tím aplikovat na soustavy s více stupni volnosti. V metodě Runge-Kutta se přiblížení k  $x_{t+\Delta t}$  získá aplikací Taylorovy řady, zpravidla s počtem členů až do určitého řádu  $(\Delta t)^N$ . Tak obdržíme výchylku v čase  $(t+\Delta t)$ . Přitom předpokládáme, že funkce  $x$  je v časovém úseku jednoznačná a spojitá. Bude pak platit

$$x(t + \Delta t) = x_{t+\Delta t} = x(t) + \Delta t \dot{x}(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \ddot{x}(t) + \frac{(\Delta t)^3}{3!} \dddot{x}(t) + \dots \quad (7.3.3)$$

Zavedeme zjednodušený zápis rov. (7.3.2)  $\dot{x} = f(x(t), t) = f$ . Derivací získáme

$$\ddot{x}(t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} = f_t + f f_x$$

podobně další derivací obdržíme

$$\dddot{x}(t) = f_{tt} + 2f f_{tx} + f^2 f_{xx} + f_x(f_t + f f_x)$$

Dosazením těchto vztahů do rov. (7.3.3) obdržíme:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t f + \frac{(\Delta t)^2}{2} (f_t + f f_x) + \frac{(\Delta t)^3}{6} [f_{tt} + 2f f_{tx} + f^2 f_{xx} + f_x(f_t + f f_x)] + \dots \quad (7.3.4)$$

Ze stavby rovnice je vidět, že pro zdárné řešení musí existovat v řešeném bodě i vyšší parciální derivace. Nejjednodušší z metod Runge-Kutta je metoda 1. řádu, známá také jako Eulerova metoda, která uvažuje pouze prvé dva členy Taylorovy řady, tedy pro první řád  $\Delta t$ :

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t f(x(t), t) \quad (7.3.5)$$

Výsledky metody 1. řádu vykazují dostatečnou přesnost pouze pro několik málo kroků s dosti malým časovým krokem  $\Delta t$ . Pak tato metoda zpravidla diverguje od přesného řešení. Proto se výhradně používají metody Runge-Kutta vyšších řádů.

Podstatou metody Runge-Kutta je to, že je vyvinuta tak, aby nebylo nutno provádět v každém kroku vyšší derivace funkce  $f$ .

Řešení je také možno provést s použitím integrálu:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \int_t^{t+\Delta t} f(x(\tau), \tau) d\tau \quad (7.3.6)$$

Použitím teoremu střední hodnoty na integrál lze rov.(7.3.6) převést na tvar

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t f(x(t + \alpha \Delta t), t + \alpha \Delta t) \quad (7.3.7)$$

pro  $\alpha$  v intervalu  $0 < \alpha < 1$ . Úkolem tak zůstává explicitní vyjádření vyšších derivací v rov.(7.3.4).

### 7.3.1 Metoda Runge-Kutta 2. Řádu

V tomto případě je  $\alpha$  voleno tak, aby výsledek rov.(7.3.7) souhlasil přesně s Taylorovým rozvojem až po člen, obsahující  $(\Delta t)^2$ . Položíme-li

$$x(t + \alpha \Delta t) = x(t) + \beta \Delta t + \dots$$

bude rov.(7.3.4) mít tvar

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t f + \alpha (\Delta t)^2 f_t + \beta (\Delta t)^2 f_x \quad (7.3.8)$$

Když srovnáme rov.(7.3.8) s rov.(7.3.4) až po členy s  $(\Delta t)^2$  dostaneme hodnoty

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$$

Proto pro metodu R-K 2.řádu bude platit

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t f \left( x(t) + \frac{\Delta t}{2} f(x(t), t) + \frac{\Delta t}{2} \right) \quad (7.3.9)$$

Pro algoritmizaci numerického řešení je výhodné zavést následující schéma

V čase  $t_0$  je známo  $x(t_0) = x_0$  a my zavedeme

$$\begin{aligned} k_1 &= \Delta t \cdot f(x_0, t_0) \\ k_2 &= \Delta t \cdot f(x_0 + k_1, t_0 + \Delta t) \\ x(t_0 + \Delta t) &= x_0 + \frac{k_1}{2} + k_2 \end{aligned} \quad (7.3.10)$$

### 7.3.2 Metoda Runge – Kutta 4. Řádu

Poněvadž i metoda R-K 2.řádu nedává úplně správné výsledky, používají se v praxi metody vyšších řádů. Ukažme si nyní postup řešení metodou 4. řádu.

Předpokládejme, že je známo  $x(t_i) = x_i$  v čase  $t_i$ . Nejprve určíme

$$\begin{aligned}
k_1 &= \Delta t \cdot f(x_i, t_i) \\
k_2 &= \Delta t \cdot f\left(x_i + \frac{k_1}{2}, t_i + \frac{\Delta t}{2}\right) \\
k_3 &= \Delta t \cdot f\left(x_i + \frac{k_2}{2}, t_i + \frac{\Delta t}{2}\right) \\
k_4 &= \Delta t \cdot f(x_i + k_3, t_i + \Delta t)
\end{aligned} \tag{7.3.11}$$

Pomocí těchto koeficientů určíme

$$x(t_i + \Delta t) = x(t_i) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{7.3.12}$$

Metody R-K nejsou tak citlivé na velikost časového kroku, jako metoda centrálních diferencí a metoda dvoukroková. Metoda R-K 4. řádu je pro technické případy dostatečně přesná. Její přesnost je úměrná  $(\Delta t)^5$ . Další výhodou těchto metod je, že nepotřebují zvláštní startovací algoritmus, poněvadž další hodnoty se počítají ze stavu stávajícího. Proto se metoda R-K někdy používá jako startovací procedura jiných metod. V takovém případě postačí metoda R-K 2. řádu, poněvadž s ní budeme počítat pouze 1 krok. Pro zvlášť vysoké požadavky na přesnost se používají metody vyšších řádů (5., 7.). Pokud řešíme soustavy o více stupních volnosti používáme v rov.(7.3.9) až (7.3.12) místo proměnných sloupcové matice (vektory).

## 7.4 Newmarkova metoda

Newmarkova metoda je vylepšením metody centrálních diferencí. Ke zpřesnění řešení používá tato metoda koeficienty  $\alpha$  a  $\beta$ . Rovnice pro rychlost a dráhu v čase  $t+\Delta t$  mají tvar:

$$\begin{aligned}
\dot{q}_{t+\Delta t} &= \dot{q}_t + [(1-\alpha)\ddot{q}_t + \alpha\ddot{q}_{t+\Delta t}]\Delta t \\
q_{t+\Delta t} &= q_t + \dot{q}_t\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\ddot{q}_t + \beta\ddot{q}_{t+\Delta t}\right]\Delta t^2
\end{aligned} \tag{7.4.1}$$

$\alpha$  a  $\beta$  jsou parametry, které jsou stanoveny tak, aby integrace byla přesná a řešení numericky stabilní. Těmito parametry je možno zvolit průběh zrychlení v uvažovaném intervalu  $\Delta t$ . Je-li

$\alpha = \frac{1}{2}$  a  $\beta = 0$  zrychlení je konstantní a rovno  $\ddot{q}_t$

$\alpha = \frac{1}{2}$  a  $\beta = \frac{1}{8}$  zrychlení je od počátku doprostřed intervalu konstantní a rovno  $\ddot{q}_t$  a

uprostřed intervalu se změní na  $\ddot{q}_{t+\Delta t}$  a je konstantní až do konce intervalu.

$\alpha = \frac{1}{2}$  a  $\beta = \frac{1}{6}$  zrychlení se mění v intervalu lineárně od  $\ddot{q}_t$  do  $\ddot{q}_{t+\Delta t}$

$\alpha = \frac{1}{2}$  a  $\beta = \frac{1}{4}$  zrychlení je konstantní a rovno střední hodnotě zrychlení na počátku a konci intervalu, tedy  $(\ddot{q}_t + \ddot{q}_{t+\Delta t})/2$

Z rov.(7.4.1) lze určit zrychlení a rychlost v čase  $t+\Delta t$ , které v maticovém zápisu budou mít tvar:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta \Delta t^2}(\mathbf{q}_{t+\Delta t} - \mathbf{q}_t) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{q}}_t - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{q}}_t \quad (7.4.2)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} = \frac{\alpha}{\beta \Delta t}(\mathbf{q}_{t+\Delta t} - \mathbf{q}_t) - \left( \frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{q}}_t - \Delta t \left( \frac{\alpha}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{q}}_t \quad (7.4.3)$$

Dosazením rov.(7.4.2) a (7.4.3) do pohybové rovnice mechanické soustavy dostaneme

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\alpha}{\beta \Delta t} \mathbf{B} + \mathbf{K} \right) \mathbf{q}_{t+\Delta t} &= \mathbf{Q}_{t+\Delta t} + \left[ \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \mathbf{M} + \Delta t \left( \frac{\alpha}{2\beta} - 1 \right) \mathbf{B} \right] \ddot{\mathbf{q}}_t + \\ &+ \left[ \frac{1}{\beta \Delta t} \mathbf{M} + \left( \frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) \mathbf{B} \right] \dot{\mathbf{q}}_t + \left[ \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\alpha}{\beta \Delta t} \mathbf{B} \right] \mathbf{q}_t \end{aligned} \quad (7.4.4)$$

Označme

$$\bar{\mathbf{M}} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\alpha}{\beta \Delta t} \mathbf{B} + \mathbf{K} \quad (7.4.5)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Q}}_{t+\Delta t} &= \mathbf{Q}_{t+\Delta t} + \left[ \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \mathbf{M} + \Delta t \left( \frac{\alpha}{2\beta} - 1 \right) \mathbf{B} \right] \ddot{\mathbf{q}}_t + \\ &+ \left[ \frac{1}{\beta \Delta t} \mathbf{M} + \left( \frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) \mathbf{B} \right] \dot{\mathbf{q}}_t + \left[ \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\alpha}{\beta \Delta t} \mathbf{B} \right] \mathbf{q}_t \end{aligned} \quad (7.4.6)$$

S použitím rov.(7.4.5) a (7.4.6) lze určit z rov.(7.4.4)

$$\mathbf{q}_{t+\Delta t} = \bar{\mathbf{M}}^{-1} \bar{\mathbf{Q}}_{t+\Delta t} \quad (7.4.7)$$

Z rov.(7.4.1) určíme také rychlost a výchylku v čase  $t+\Delta t$ . Důležitou vlastností této metody je, že nepotřebuje speciální startovací algoritmus. U lineárních mechanických soustav je tato metoda nepodmíněně stabilní pro  $\alpha \geq \frac{1}{2}$  a  $\beta \geq \frac{1}{4}(\alpha + 0,5)^2$ . Maximální chyba vzniká pro  $\alpha = \frac{1}{2}$  a  $\beta = \frac{1}{4}$ . Časový krok nutno volit v souladu s rov.(7.1.8).