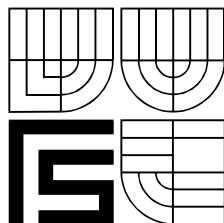


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles



Jaromír Slavík

POČÍTAČOVÉ METODY MECHANIKY

Brno 2001

Obsah

1.	Úvod	3
1.1	Technické dílo a jeho modely	4
1.2	Dynamické modely	5
1.2.1	Klasifikace systémů	7
1.2.2	Lineární a nelineární systémy	8
1.2.3	Stacionární a nestacionární systémy	8
1.2.4	Autonomní systémy	8
1.2.5	Deterministické a stochastické systémy	8
1.2.6	Identifikace systémů	8
2.	Analytická dynamika diskrétních soustav	10
2.1	Princip virtuálních prací u pohybu bodu	10
2.2	Síly v kinematických dvojicích	11
2.2.1	Zobecněné souřadnice	12
2.3	Hamiltonův princip u konzervativních soustav	12
2.3.1	Lagrangeovy rovnice 2. druhu	14
2.4	Klasifikace zobecněných sil	14
2.4.1	Vnitřní síly	14
2.4.1.1	Pružné síly	15
2.4.1.2	Dissipativní síly	15
2.4.2	Vnější síly	17
2.4.2.1	Konzervativní síly	17
2.4.2.2	Nekonzervativní síly	17
3.	Vynucené kmitání lineárních soustav s 1 stupněm volnosti	18
3.1	Silové buzení	18
3.1.1	Budící síla je harmonickou funkcí času	19
3.1.2	Buzení nevyváženou rotující hmotou	21
3.1.3	Odezva soustavy na budící sílu obecně časově závislou	25
3.1.4	Odezva soustavy na periodickou budící sílu	25
3.2	Kinematické buzení	27
4.	Kmitání lineárních soustav s více stupni volnosti	31
4.1	Sestavení pohybových rovnic	32
4.2	Volné netlumené kmitání	33
4.2.1	Ortogonalita vlastních vektorů	34
4.2.2	Hlavní souřadnice	35
4.2.3	Výpočet vlastních vektorů Jacobiho metodou	36
4.2.4	Symetrizace matice – Choleského rozklad	41
4.2.5	Householderova metoda tridiagonalizace matice	42
4.2.6	Rayleighův kvocient	44
4.2.7	Redukce počtu stupňů volnosti	45
4.2.7.1	Redukce přetvořením mechanického modelu	45
4.2.7.2	Lanczosova metoda redukce	48
4.3	Volné tlumené kmitání soustavy	49
4.3.1	Proporcionální tlumení	50
4.4	Vynucené kmitání mechanických soustav	51
4.4.1	Buzení harmonickou silou	52
4.4.2	Budící síla je obecnou funkcí času	53
5.	Kmitání lineárních kontinuů	55

5.1	Podélné kmitání prutů	55
5.1.1	Vynucené kmitání prutů	58
5.1.1.1	Kmitání prutu buzeného harmonickou silou	58
5.1.1.2	Volný prut kinematicky buzený	59
5.2	Torzní kmitání hřidelů kruhového průřezu	59
5.3	Příčné kmitání přímých nosníků	60
5.3.1	Volné příčné kmitání prismatického nosníku	60
5.3.2	Kmitání nosníku buzeného osamělým zatížením	64
5.3.3	Metoda přenosových matic	68
5.3.4	Vliv rotační setrvačnosti a smykové deformace	72
5.4	Kmitání membrán	72
5.4.1	Obdélníková membrána	72
5.4.2	Kruhová membrána	75
5.5	Příčné kmitání desek	78
5.5.1	Kmitání obdélníkové desky	80
5.5.2	Kmitání kruhové desky	84
6.	Přibližné metody výpočtu vlastních frekvencí	85
6.1	Ryleghova metoda	85
6.2	Ritzova metoda	89
7.	Metody přímé integrace pohybových rovnic	92
7.1	Metoda centrálních diferencí	92
7.2	Dvoukroková metoda	94
7.3	Metoda Runge-Kutta	94
7.3.1	Metoda Runge-Kutta 2. řádu	96
7.3.2	Metoda Runge-Kutta 4. řádu	96
7.4	Newmarkova metoda	97
8.	Ladění mechanických soustav	99
8.1	Metoda postupných lineárních aproximací	100
8.1.1	Dynamická citlivost a určení prvků matice ladění	102
8.1.2	Dynamická citlivost konzervativních soustav	102
8.1.3	Ladící proces	104
	Literatura	106

1. ÚVOD

Mechanika se postupně vyvíjela po dobu více jak 2000 let. Její vývoj postupoval velmi pomalu od filozofických náhledů v dobách, kdy neexistovala experimentální zařízení a matematický aparát byl velmi jednoduchý. Snadněji se zkoumaly jevy statické a proto se statika, která navíc byla spjata s nejstarší potřebou lidstva - stavitelstvím, byla zpracována nejdříve. Daleko složitější byl vývoj kinematiky a dynamiky, u nichž pozorování jevů za pohybu a abstrakce od vedlejších vlivů byla daleko obtížnější než u statiky. Z toho důvodu docházelo při prvních úvahách i k zásadním omylům. S rozvojem měřicí techniky a matematiky se rozvíjela i mechanika. Dlouhá cesta začínající u Aristotela a možná ještě v dávnější době ve vyvinutých kulturách dálného východu, byla dovršena Izákem Newtonem, který položil základ novodobé klasické mechaniky. Zákony a axiomy jím formulované se dále rozvíjely spolu s matematickým aparátem. Naše doba je ve znamení nebývalého rozvoje numerické matematiky a výpočetní techniky, které umožňují řešit rozsáhlé mechanické soustavy mnoha tisíci stupňů volnosti a dovolují řešit matematické vztahy, které nejsou doposud řešitelné v uzavřeném tvaru. Propojením moderních výpočtových metod s klasickou mechanikou vzniká tak zvaná *počítačová mechanika*, která sestavuje algoritmy řešení mechanických soustav tak, aby byly připraveny pro další počítačové zpracování. Samozřejmě existuje řada profesionálních software (sw) jako je např. ANSYS, NASTRAN, ADAMS, pracujících na základě metody konečných prvků ((MKP) především pro řešení napjatostních poměrů, ale i pro dynamické odezvy nebo stanovení teplotních polí. Sw SYSNOISE, REYNODS, VIOLINE jsou určeny pro řešení akustických jevů. Vedle těchto programů existují podpůrné programy matematické, označované někdy souhrnně MATCAD, mezi něž patří MAPLE, MATLAB, MATEMATICA atd. Naším úkolem však bude probrat teoretické základy mechaniky tuhých a poddajných těles a prostředí, na jejichž základě jsou různé profesionální sw založeny.

Dříve než přistoupíme k vlastní problematice, bude vhodné uvést některé základní pojmy, které jsou důležité pro další úvahy a dynamická řešení mechanických soustav.

1.1 Technické dílo a jeho modely

Základním úkolem pro zjišťování vlastností reálného díla je tvorba jeho modelu. Nebudeme se zde věnovat kategorizaci modelu a jeho tvorby, tedy modelováním v plné šíři, protože to je probráno v [8]. V zásadě lze říci, že model si musí zachovat všechny podstatné vlastnosti pro

vyžadované řešení. Jinak bude sestaven model pro řešení termomechanických vlastností díla, jinak pro stanovení mechanických vlastností. V zásadě rozeznáváme:

- *model fyzický* je hmotný útvar, na němž se zjišťují jeho vlastnosti měřením a porovnáváním.
- *model geometrický* má stejný tvar a stejnou strukturu jako reálný objekt.
- *model podobnostní* je vytvořen na základě teorie podobnosti.
- *model analogový* je fyzický model, u kterého zkoumané vlastnosti mají jinou fyzikální podstatu než reálné dílo, avšak jejich matematická formulace je stejná.
- *model abstraktní* je tvořen abstraktními útvary (pojmy, veličinami, informacemi) a jeho chování se řeší myšlenkovými a logicko-matematickými formulacemi. Tyto modely je možno dělit na:
 - *model teoretický* je tvořen existujícími teoriemi. Řešení jeho vlastností je aplikací těchto teorií a využívá logických a logicko-matematických operací
 - *model výpočtový* je formulován v matematickém tvaru
 - *model počítačový* je formulován a řešen v prostředí počítače

V dalším se zaměříme na dynamické modely, které popisují a řeší dynamické vlastnosti modelu.

1.2 Dynamické systémy

Ze zkušeností, které jsme získali při analýze jednoduchých modelů, můžeme vyjít i při formulování pojmu abstraktní dynamický systém, který patří mezi základní pojmy nejen mechaniky, ale i teorie regulace, kybernetiky, mechatroniky i jiných technických disciplín. Aby bylo možno využít teorie mechanických systémů i v těchto disciplínách, je vhodné definovat pojem abstraktivního mechanického systému ve smyslu Kalmánovy definice orientovaného dynamického systému, t.j. matematického modelu s jasně definovanými vstupy a výstupy a se známými počátečními podmínkami. Je zřejmé, že každý fyzikální model může být abstraktně orientovaný model, avšak ne každý abstraktní model má fyzikální realizaci.

1.2.1 KLASIFIKACE SYSMŮ

Klasifikace systémů je bezprostředně spjata s vlastnostmi operátorové rovnice a jejího matematického modelu, který vyjadřuje vzájemnou závislost mezi buzením

$\mathbf{f}^T(t) = [f_1(t) \ f_2(t) \dots f_n(t)]$ a výstupním vektorem, to jest odezvou systému

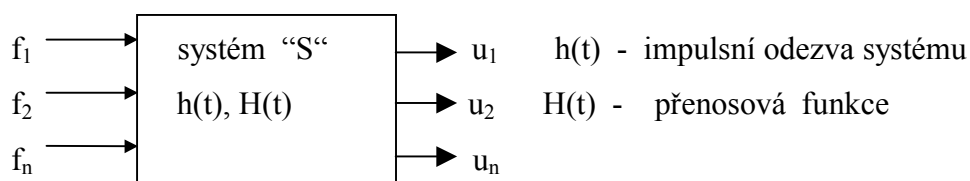
$\mathbf{u}^T(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \dots u_n(t)]$ jak ukazuje obr. 1.1. Jsou-li parametry systému „S“ obsaženy v operátoru H , lze ke každé realizaci $\mathbf{f}(t)$ přiřadit odezvu pomocí následující rovnice

$$\mathbf{u}(t) = H(t) \cdot \mathbf{f}(t) \quad (1.2.1)$$

Operátor H reprezentuje u dynamických systémů t.zv. *matici přenosových funkcí*. Existuje-li operátor $\mathbf{L} = \mathbf{H}^{-1}$, lze rov.(1.2.1) přepsat na tvar:

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}(t) \quad (1.2.2)$$

Operátor \mathbf{L} představuje pohybové rovnice systému a doplňující podmínky, nezbytné pro jednoznačné určení odezvy $\mathbf{u}(t)$ při daném buzení $\mathbf{f}(t)$. Pro řešené systémy představuje \mathbf{L} soustavu diferenciálních rovnic.



Obr. 1.

1.2.2 LINEÁRNÍ A NELINEÁRNÍ SYSTÉMY

Systémy považujeme za lineární, platí-li princip superpozice, t.j. když mezi libovolnými budícími vektory \mathbf{f}_1 , \mathbf{f}_2 a odezvou \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 platí závislost

$$\mathbf{H}(\alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2) = \alpha_1 \mathbf{H}\mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{H}\mathbf{f}_2 \quad (1.2.3)$$

respektive

$$\mathbf{L}(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2) = \alpha_1 \mathbf{L}\mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{L}\mathbf{u}_2, \quad (1.2.4)$$

kde α_1 , α_2 jsou libovolné konstanty. Pokud rov.(1.2.3) a (1.2.4) nejsou splněny jsou tyto systémy nelineární.

1.2.3 STACIONÁRNÍ A NESTACIONÁRNÍ SYSTÉMY

Pokud se vlastnosti systému v daném časovém úseku nemění, nazýváme systém *stacionární* v tomto časovém úseku. Pokud je časový úsek definován v intervalu $(-\infty, +\infty)$ je systém *stacionární*, což znamená, že při analýze jeho vlastností nezávisí na volbě počátku. Děje probíhající ve stacionárních systémech lze popsat diferenciálními rovnicemi s konstantními koeficienty. Procesy probíhající v nestacionárních systémech musí být popsány diferenciálními rovnicemi s proměnnými koeficienty.

1.2.4 AUTONOMNÍ A NEAUTONOMNÍ SYSTÉMY

Pro autonomní systémy je charakteristické, že vektor $\mathbf{f}(t)=\mathbf{0}$, to znamená, že dynamické děje mohou v těchto systémech probíhat jen na úkor vnitřních zdrojů energie. Pro $\mathbf{f}(t) \neq \mathbf{0}$ jsou systémy neautonomní.

1.2.5 DETERMINISTICKÉ A STOCHASTICKÉ SYSTÉMY

Systém nazýváme *deterministický*, je-li jeho chování v budoucnosti jednoznačně určeno počátečními podmínkami v čase t_0 a budoucími hodnotami vstupních signálů v čase $t \geq t_0$. *Stochastické* systémy mají odezvy pro každé $t \geq t_0$ náhodné.

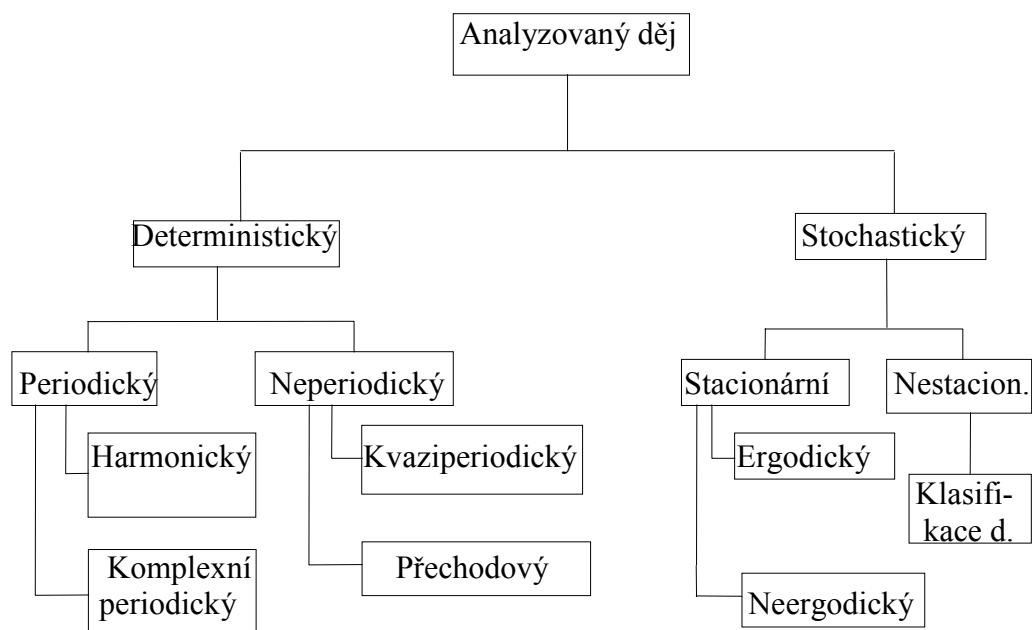
1.2.6 IDENTIFIKACE SYSTÉMŮ

Problematika identifikace se v průběhu posledních let rozdělila zhruba do tří, vzájemně se doplňujících tematických oblastí:

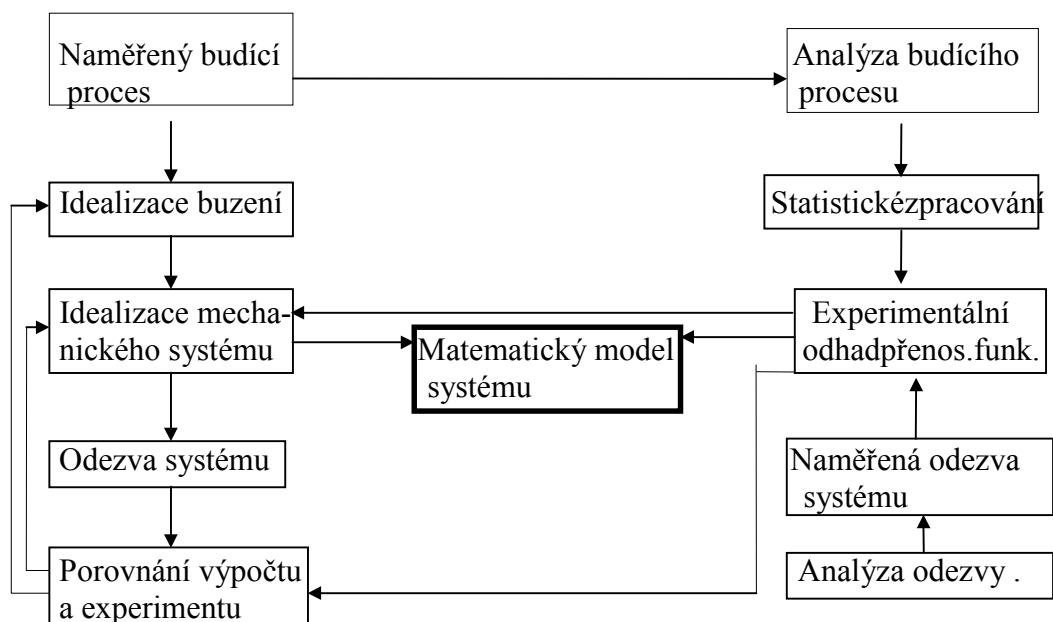
- rozhodování o charakteru systémů (resp. jejich modelů) a procesů, které v nich probíhají
- odhady parametrů výpočtových modelů
- na vzájemné porovnání chování se reálných objektů a jejich modelů

Rozhodování o charakteru systému je schematicky znázorněno v obr. 1.2.

Další kroky identifikace ukazuje obr. 1.3.



Obr. 1.2



Obr. 1.3