

6.PŘIBLIŽNÉ METODY VÝPOČTU VLASTNÍCH FREKVENCÍ

Jak jsme viděli, je řešení lineárních kontinuí poměrně složité a přesný výpočet je možný jen pro tvarově jednoduchá tělesa. U těles složitějšího tvaru je přímé řešení zpravidla velmi složité a mnohdy je řešení v uzavřeném tvaru nemožné. V takových případech se používají různé přibližné metody, které umožňují stanovit jednu nebo několik nejnižších frekvencí. To ve velké většině případů technické praxi postačuje. Postupem doby se vyvinula celá řada různých metod, z nichž si zde dvě uvedeme.

6.1 Rayleighova metoda

Již v kap.4. byl popsán Rayleighův kvocient, který je obecně dán poměrem maximální potenciální energie ku maximální jednotkové kinetické energii (při jednotkové vlastní úhlové frekvenci):

$$\lambda = \Omega^2 = \frac{E_{P \max}}{E_{K \max}^*} \quad (6.1.1)$$

Při této metodě lze zahrnout do výpočtu vlastních úhlových frekvencí také vlivy bodových hmotností, umístěných na lineárních kontinuích a pružných uloženíh. V dalším budou uvedeny vztahy pro jednotlivé druhy kontinuí, která byla probrána v kap.5. Označení je použito stejné, jak bylo v předchozí kapitole definováno. Všechny amplitudy (U , V , W , Φ) je možno při Rayleighově metodě odhadnout.

Podélně kmitající prut:

$$E_P = \frac{1}{2} E \int_0^l A(x) U'^2(x) dx \quad (6.1.2)$$

$$E_K^* = \frac{1}{2} \int_0^l A(x) \rho U^2(x) dx + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j U^2(x_j) \quad (6.1.3)$$

Torzně kmitající hřídel kruhového průřezu

$$E_P = \frac{1}{2} G \int_0^l J_p(x) \Phi'^2(x) dx \quad (6.1.4)$$

$$E_K^* = \frac{1}{2} \rho \int_0^l J_p(x) \Phi^2(x) dx + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n I_j \Phi^2(x_j) \quad (6.1.5)$$

Příčně kmitající nosník

$$E_P = \frac{1}{2} E \int_0^l J(x) W'^2(x) dx + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n k_j W^2(x_j) \quad (6.1.6)$$

$$E_K^* = \frac{1}{2} \rho \int_0^l A(x) W^2(x) dx + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j W^2(x_j) \quad (6.1.7)$$

kde k_j je konstanta tuhosti pružné podpory v místě x_j

Příčně kmitající obdélníková membrána

$$E_P = \frac{1}{2} N \iint_A \left\{ \left[\frac{\partial W(x, y)}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial W(x, y)}{\partial y} \right]^2 \right\} dx dy \quad (6.1.8)$$

$$E_K^* = \frac{1}{2} q \iint_A W^2(x, y) dx dy + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j W^2(x_j, y_j) \quad (6.1.9)$$

Příčně kmitající kruhová membrána

$$E_P = \frac{1}{2} N \iint_A \left\{ \left[\frac{\partial W(r, \vartheta)}{\partial r} \right]^2 + \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial W(r, \vartheta)}{\partial \vartheta} \right]^2 \right\} r d\vartheta dr \quad (6.1.10)$$

$$E_K^* = \frac{1}{2} q \iint_A W^2(r, \vartheta) r d\vartheta dr + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j W^2(r_j, \vartheta_j) \quad (6.1.11)$$

Příčně kmitající obdélníková deska

$$E_P = \frac{D}{2} \iint_A \left\{ \left[\frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} \right]^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (6.1.12)$$

$$E_K = \frac{1}{2} \rho h \iint_A W^2(x, y) dx dy + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j W^2(x_j, y_j) \quad (6.1.13)$$

Příčně kmitající kruhová deska

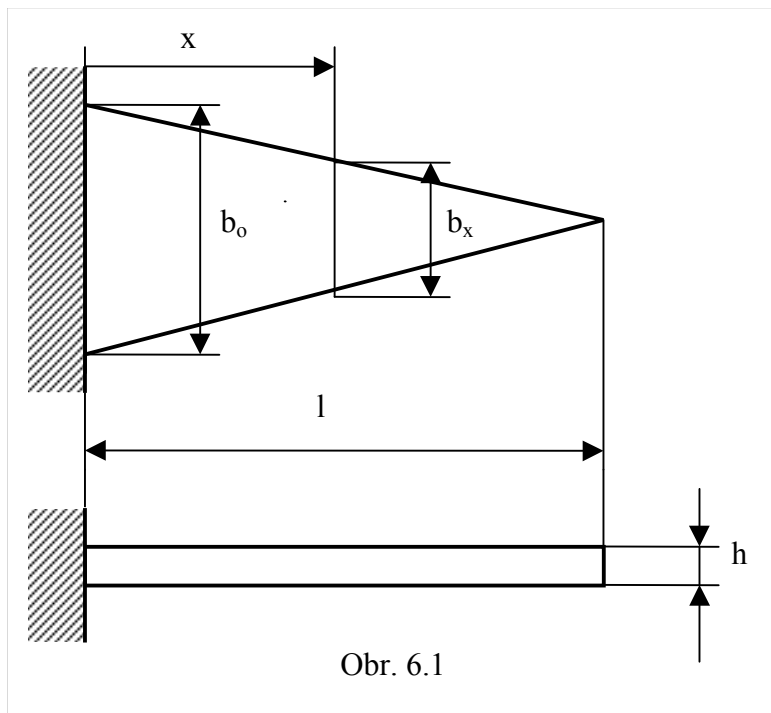
$$E_P = \frac{1}{2} D \int_{r_0}^{r_1} \left\{ \left[\frac{d^2 W(r)}{dr^2} \right]^2 + \frac{1}{r^2} \left[\frac{dW(r)}{dr} \right]^2 + 2\mu \frac{1}{r} \frac{d^3 W(r)}{dr^3} \right\} r dr \quad (6.1.14)$$

$$E_K^* = \frac{1}{2} \rho h \int_{r_0}^{r_1} W^2(r) r dr \quad (6.1.15)$$

Uvedené výrazy platí pro osově souměrnou desku.

Rayleighův kvocient dává přesnou hodnotu pro přesný tvar kmitu. My však dosazujeme do výrazů pro potenciální a kinetickou energii odhadnutý tvar kmitu, který však musí splňovat okrajové podmínky uložení, kdežto silové podmínky nemusí být splněny. Velmi dobrých výsledků se dosáhne, když se použije deformačních tvarů při statickém zatížení. Ze všech

předchozích rovnic je vidět, že dávají možnost řešení lineárních kontinuí s proměnným průřezem.



Ukažme si nyní tento způsob na příkladu vetknutého nosníku konstantní tloušťky h (Obr.6.1) a proměnné šířky $b(x)$, která se mění od hodnoty b_0 ve vetknutí až po nulovou hodnotu na volném konci..

Příčný průřez nosníku je dán výrazem

$$A(x) = b_0 h \left(1 - \frac{x}{l} \right)$$

a kvadratický moment tohoto průřezu bude

$$J(x) = \frac{1}{12} b_0 h^3 \left(1 - \frac{x}{l} \right)$$

Tvar průhybu nosníku uvažujme parabolický, který splňuje podmínku nulové deformace ve vetknutí:

$$W(x) = ax^2$$

Potenciální energii určíme z rov.(6.1.6):

$$E_p = \frac{1}{2} E \frac{1}{12} b_0 h^3 4a \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l} \right) dx = \frac{1}{12} E b_0 h^3 a^2 l$$

Kinetickou energii určíme z rov.(6.1.7)

$$E_k^* = \frac{1}{2} \rho b_0 h 4a^2 \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l} \right) x^4 dx = \frac{1}{60} \rho b_0 h a^2 l^5$$

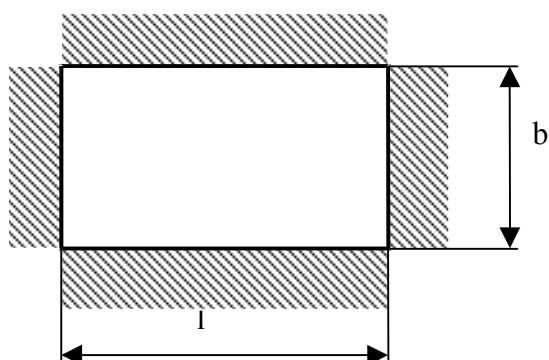
Dosazením do rov.(6.1.1) určíme vlastní úhlovou frekvenci :

$$\Omega^2 = \frac{E_P}{E_K} = \frac{\frac{1}{12} E b_0 h^3 a^2 l}{\frac{1}{60} \rho b_0 h a^2 l^5} = 5 \frac{E h^2}{\rho l^4}$$

odkud dostaneme

$$\Omega = 2,236 \frac{h}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Jako další příklad uvažujme obdélníkovou desku konstantní tloušťky h , která je na všech stranách vetknutá.



Obr. 6.2

Především musíme zvolit takovou funkci pro tvar deformace, která splňuje okrajové podmínky, to znamená, že v místě vetknutí je průhyb a natočení nulové. Takovou funkcí je např.:

$$X(x) = x^2 + a_1 x^3 + a_2 x^4$$

Konstanty a_1 a a_2 určíme tak, aby byla splněna i okrajová podmínka pro $x=l$:

$$X(l) = l^2 + a_1 l^3 + a_2 l^4 = 0$$

$$\frac{dX(l)}{dx} = 2l + 3a_1 l^2 + 4a_2 l^3 = 0$$

Z těchto rovnic určíme potřebné konstanty:

$$a_1 = -\frac{2}{l} \quad \text{a} \quad a_2 = \frac{1}{l^2}$$

Použitím těchto hodnot obdržíme vztah pro průběh deformace ve směru osy x :

$$X(x) = x^2 - \frac{2}{l} x^3 + \frac{1}{l^2} x^4$$

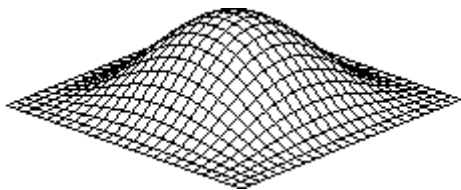
Stejný tvar bude mít i deformace ve směru osy y :

$$Y(y) = y^2 - \frac{2}{b} y^3 + \frac{1}{b^2} y^4$$

Průhyb desky v obecném místě bude:

$$W(x, y) = \left(x^2 - \frac{2}{l} x^3 + \frac{1}{l^2} x^4 \right) \left(y^2 - \frac{2}{b} y^3 + \frac{1}{b^2} y^4 \right)$$

Tvar deformované desky ukazuje obr. 6.3.



Obr. 6.3

Potenciální energii určíme z rov.(6.1.12):

$$E_p = \frac{1}{2} D \int_0^l \int_0^b \left[\left(2 - \frac{12}{l} x + \frac{12}{l^2} x^2 \right) \left(y^2 - \frac{2}{b} y^3 + \frac{y^4}{b^2} \right) + \left(x^2 - \frac{2}{l} x^3 + \frac{x^4}{l^2} \right) \left(2 - \frac{12}{b} y + \frac{12}{b^2} y^2 \right) \right] dx dy$$

Po provedení integrace obdržíme:

$$E_p = \frac{D}{11025} (7b^4 + 4l^2 b^2 + 7l^4)$$

Jednotkovou kinetickou energii určíme z rov.(6.1.13):

$$E_k^* = \frac{1}{2} \rho h \int_0^l \int_0^b \left(x^2 - \frac{2}{l} x^3 + \frac{x^4}{l^2} \right)^2 \left(y^2 - \frac{2}{b} y^3 + \frac{y^4}{b^2} \right)^2 dx dy = \frac{\rho h b^5 l^5}{793800}$$

Po dosazení do rov.(6.1.1) dostaneme:

$$\Omega^2 = 72 \frac{D(7b^4 + 4l^2 b^2 + 7l^4)}{(bl)^4 \rho h} \quad \text{respektive} \quad \Omega = \frac{6}{l^2 b^2} \sqrt{2(7b^4 + 4l^2 b^2 + 7l^4)} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$

6.2 Ritzova metoda

Ritzova metoda, která se používá i v metodě konečných prvků je založena na skutečnosti, že Rayleighův kvocient leží v intervalu přesných hodnot vlastních úhlových frekvencí. To tedy znamená, že vlastní tvar deformace minimalizuje Rayleighův kvocient. Proto se podle Ritze aproximuje vlastní tvar lineární kombinací nezávislých funkcí, které splňují okrajové podmínky. Pro dvourozměrné kontinuum to bude:

$$W(x, y) = a_1 f_1(x, y) + a_2 f_2(x, y) + \dots + a_n f_n(x, y) \quad (6.2.1)$$

To znamená, že Rayleighův kvocient bude funkcí nezávislých koeficientů:

$$\lambda = \frac{E_p}{E_k^*} = \lambda(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Minima těchto hodnot jsou dána n podmínkami

$$\frac{\partial \lambda}{\partial a_i} = \frac{\partial}{\partial a_i} \left(\frac{E_P}{E_K^*} \right) = \frac{\partial}{\partial a_i} (E_P - \Omega^2 E_K^*) \quad \text{pro } i=1,2,\dots,n \quad (6.2.2)$$

Tímto postupem se získá n homogenních rovnic. Pro netriviální řešení této soustavy musí být determinant soustavy roven nule. Poněvadž je tento determinant n stupně obdržíme n hodnot $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ nebo $\Omega_1^2 < \Omega_2^2 < \dots < \Omega_n^2$. Tak jako většinu analytických metod lze Ritzovu metodu použít všude tam, kde platí zákon zachování mechanické energie. Výhoda je v tom, že není potřeba sestavovat pohybové rovnice, ale stačí pouze geometrické okrajové podmínky. Postup řešení si ukážeme na určení prvních dvou vlastních úhlových frekvencí prismatického, oboustranně vetknutého nosníku. Funkci, která splňuje geometrické okrajové podmínky navrhne ve tvaru:

$$W(x) = a_1 x^2 (l-x)^2 + a_2 x^3 (l-x)^3$$

Tato funkce splňuje podmínku $W(0) = W(l) = W'(0) = W'(l) = 0$. Potenciální energii stanovíme z rov.(6.1.6):

$$E_P = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left[2a_1(l-x)^2 - 8a_1x(l-x) + 2a_1x^2 + 6a_2x(l-x)^3 - 18a_2x^2(l-x)^2 + 6a_2x^3(l-x) \right]^2 dx$$

a po integraci obdržíme:

$$E_P = \frac{1}{2} EJ \left(\frac{4}{5} a_1^2 l^5 + \frac{12}{35} a_1 a_2 l^7 + \frac{2}{35} a_2^2 l^9 \right)$$

Podobně obdržíme z rov.(6.1.7) kinetickou energii

$$E_K = \frac{\rho A}{2} \int_0^l \left[a_1 x^2 (l-x)^2 + a_2 x^3 (l-x)^3 \right]^2 dx = \frac{\rho A}{2} \left(\frac{a_1^2 l^9}{690} + \frac{a_1 a_2 l^{11}}{1386} + \frac{a_2^2 l^{13}}{12012} \right)$$

Dosazením výrazů pro potenciální a kinetickou energii do rov.(6.2.2) a derivováním podle a_1 a a_2 dostaneme dvě rovnice:

$$l^5 \left[\left(\frac{4EJ}{5} - \frac{A\rho l^4}{690} \Omega^2 \right) a_1 + \left(\frac{6EJl^2}{35} - \frac{A\rho l^6}{2772} \Omega^2 \right) a_2 \right] = 0$$

$$l^7 \left[\left(\frac{6}{35} EJ - \frac{1}{2772} A\rho l^4 \Omega^2 \right) a_1 + \left(\frac{2}{35} EJl^2 - \frac{1}{12012} A\rho l^6 \Omega^2 \right) a_2 \right] = 0$$

Pro netriviální řešení těchto rovnic musí být determinant soustavy nulový, Z této podmínky obdržíme po rozvinutí determinantu kvadratickou rovnici pro Ω^2 :

$$A^2 \rho^2 l^8 \Omega^4 - \frac{83952}{5} EJ A \rho l^4 \Omega^2 + 8154432 E^2 J^2 = 0$$

a jejím řešením obdržíme:

$$\Omega_1 = \frac{22,374}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}} \quad \text{a} \quad \Omega_2 = \frac{127,632}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}$$

Přesným řešením bychom dostali

$$\Omega_1 = \frac{22,20}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}} \quad \text{a} \quad \Omega_3 = \frac{120,90}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}$$

Jak vidět, vypočetli jsme Ritzovou metodou vlastně 1. 3. Vlastní úhlovou frekvenci a to s chybami asi 0,78% a 5,57%, což je pro technické využití dostatečná přesnost. Daleko větší nepřesnost je dosahována při určování posouvajících sil a ohybových momentů, poněvadž zvolená *bázová funkce* splňuje pouze geometrické a nikoli silové okrajové podmínky. Tu vznikají chyby 100% i více. Poněvadž je přesné řešení u většiny případů neznámé, je nejistota řešení dynamických silových účinků příliš velká. Při zachování všech výhod variační metody lze nedostatek Ritzovy metody částečně eliminovat použitím MKP.