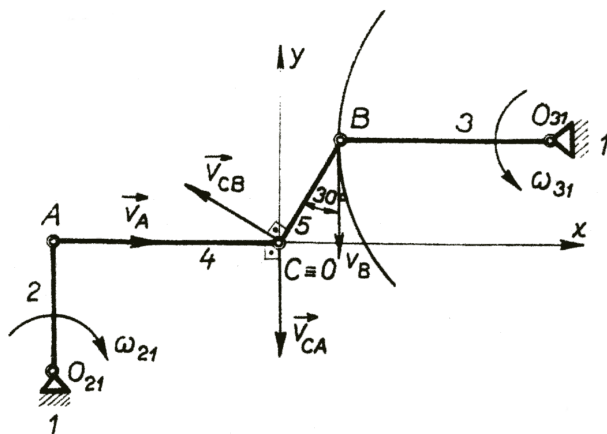


Zadání

U pětičlenného kloubového diferenciálního mechanismu na obrázku jsou známé úhlové rychlosti ω_{21} a ω_{31} a úhlová zrychlení α_{21} a α_{31} . Pro daný okamžik stanovte výpočtem rychlost a zrychlení bodu C. $\overline{AO_{21}} = b\sqrt{3}$, $\overline{BO_{31}} = b$, $\overline{AC} = 2b$, $\overline{BC} = \frac{b}{2}$.



Řešení

Rychlost bodu A je:

$$\mathbf{v}_A = \begin{bmatrix} \omega_{21} b \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rychlost bodu B je:

$$\mathbf{v}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_{31} b \end{bmatrix}$$

Bod C patří členům mechanismu 4 a 5, které se pohybují obecným rovinným pohybem. Rychlost $\mathbf{v}_C$ je:

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{CA} = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{CB}$$

Směry rychlostí $\mathbf{v}_{CA}$ a $\mathbf{v}_{CB}$ známe, jsou to kolmice na spojnice bodů CA, resp. CB. Orientace jsou naznačeny na obrázku. Neznámé ovšem jsou velikosti. Rychlosti jsou:

$$\mathbf{v}_{CA} = \begin{bmatrix} 0 \\ -v_{CA} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{CB} = \begin{bmatrix} -v_{CB} \cos 30^\circ \\ v_{CB} \sin 30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} v_{CB} \\ \frac{1}{2} v_{CB} \end{bmatrix}$$

Velikosti rychlostí řešením rovnice $\mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{CA} = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{CB}$. Nejprve ve směru osy x:

$$\sqrt{3} \omega_{21} b + 0 = 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} v_{CB}$$

$$v_{CB} = -2 \omega_{21} b$$

Ve směru osy y:

$$\begin{aligned} 0 - v_{CA} &= -\omega_{31}b + \frac{1}{2}v_{CB} \\ v_{CA} &= \omega_{31}b + \omega_{21}b = (\omega_{21} + \omega_{31})b \end{aligned}$$

Velikost rychlosti v_{CB} vyšla záporná. To znamená, že rychlost má ve skutečnosti opačnou orientaci, než je naznačeno na obrázku. Zbývá ještě určit $\mathbf{v}_C$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_C &= \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{CA} = \begin{bmatrix} \omega_{21}b\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -v_{CA} \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}_C &= \begin{bmatrix} \omega_{21}b\sqrt{3} \\ -(\omega_{21} + \omega_{31})b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Podobným způsobem se určí i zrychlení. Nesmí se však zapomenout, že zrychlení rotačního pohybu má dvě složky - tečné a normálové. Zrychlení bodu A je:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_A &= \mathbf{a}_{At} + \mathbf{a}_{An} = \begin{bmatrix} -\alpha_{21}b\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_{21}^2b\sqrt{3} \end{bmatrix} \\ \mathbf{a}_A &= \begin{bmatrix} -\sqrt{3}\alpha_{21}b \\ -\sqrt{3}\omega_{21}^2b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Zrychlení bodu B:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_{Bt} + \mathbf{a}_{Bn} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha_{31}b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{31}^2b \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{a}_B &= \begin{bmatrix} \omega_{31}^2b \\ -\alpha_{31}b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pro zrychlení, stejně jako pro rychlosti, platí vztahy pro obecně rovinný pohyb. Je však nutno uvažovat rozklad na tečné a normálové zrychlení.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_C &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{CA} = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{CB} \\ \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{CA} &= \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{CB} \end{aligned}$$

Zrychlení $\mathbf{a}_{CA}$, $\mathbf{a}_{CB}$, $\mathbf{a}_{CBt}$ a $\mathbf{a}_{CBn}$ zatím nejsou známá. Jsou však známé jejich směry. U tečných zrychlení jsou stejné jako u rychlostí $\mathbf{v}_{CA}$ a $\mathbf{v}_{CB}$. U normálových zrychlení je to směr spojnice bodů CA, resp. CB. U normálových zrychlení je známá i orientace - do středu, tedy k bodu A, resp. B. Velikost se určí z rychlostí. Normálová zrychlení tedy jsou:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{CA} &= \begin{bmatrix} -a_{CA} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{v_{CA}^2}{2b} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{a}_{CB} &= \begin{bmatrix} a_{CBx} \\ -a_{CBn} \end{bmatrix} \\ a_{CBx} &= a_{CBn} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \frac{2v_{CB}^2}{b} = \frac{v_{CB}^2}{b} \\ a_{CBn} &= -a_{CBn} \cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2v_{CB}^2}{b} = -\sqrt{3} \frac{v_{CB}^2}{b} \end{aligned}$$

Orientace tečných zrychlení není známa. Zvolí se stejně jako u rychlostí s tím, že v případě opačné orientace vyjde její velikost záporná.

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{CAt} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -a_{CAt} \end{bmatrix} \\ \mathbf{a}_{CBt} &= \begin{bmatrix} -a_{CBt} \cos 30^\circ \\ a_{CBt} \sin 30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} a_{CBt} \\ \frac{1}{2} a_{CBt} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Velikost tečných zrychlení $\mathbf{a}_{CAt}$ a $\mathbf{a}_{CBt}$ se určí řešením rovnice $\mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{CAt} + \mathbf{a}_{CAN} = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{CBt} + \mathbf{a}_{CBn}$. Ve směru x:

$$\begin{aligned}-\sqrt{3}\alpha_{21}b + 0 - a_{CAN} &= \omega_{31}^2 b - \frac{\sqrt{3}}{2} a_{CBt} + a_{CBnx} \\ a_{CBt} &= \frac{2}{\sqrt{3}} (a_{CBnx} + \omega_{31}^2 b + \sqrt{3}\alpha_{21}b + a_{CAN})\end{aligned}$$

Ve směru y:

$$\begin{aligned}-\sqrt{3}\omega_{21}^2 b - a_{CAt} + 0 &= -\alpha_{31}b + \frac{1}{2} a_{CBt} + a_{CBny} \\ +\omega_{21}^2 b\sqrt{3} + a_{CAt} &= +\alpha_{31}b - \frac{1}{2} a_{CBt} - a_{CBny} \\ a_{CAt} &= +\alpha_{31}b - \frac{1}{2} a_{CBt} - a_{CBny} - \sqrt{3}\omega_{21}^2 b\end{aligned}$$

Zrychlení $\mathbf{a}_C$ se určí složením:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_C &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{CAt} + \mathbf{a}_{CAN} \\ \mathbf{a}_C &= \begin{bmatrix} -\sqrt{3}\alpha_{21}b \\ -\sqrt{3}\omega_{21}^2 b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -a_{CAt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_{CAN} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{a}_C &= \begin{bmatrix} -\sqrt{3}\alpha_{21}b - a_{CAN} \\ -\sqrt{3}\omega_{21}^2 b - a_{CAt} \end{bmatrix}\end{aligned}$$