

Zadání

Auto A se pohybuje s rychlostí v^A a se zrychlením a^A . Auto B projíždí zatáčkou o poloměru R^B rychlostí v^B . Určete zdánlivou rychlost a zrychlení auta B v poloze podle obrázku vzhledem k pozorovateli v autě A. Řešte ortogonální transformací souřadnic.

Řešení

K autu A se vztahuje souřadná soustava s indexem 1. Pro auto A platí:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1^A &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}_1^A &= \begin{bmatrix} -v^A \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{a}_1^A &= \begin{bmatrix} -a^A \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Auto B se umístí do souřadné soustavy s indexem 2, která má střed v poloze auta A, která se však pohybuje spolu s autem B. Je natočena oproti soustavě s indexem 1 o úhel φ , o který auto B projelo zatáčku, a otáčí se vzhledem k ní s úhlovou rychlostí $\omega = -\frac{v^B}{R^B}$. Úhlové zrychlení otáčení soustav α je nulové, protože velikost rychlosti auta se nemění. Odtud transformační matice jsou:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{21} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \\ \dot{\mathbf{C}}_{21} &= \begin{bmatrix} -\omega \sin \varphi & -\omega \cos \varphi \\ \omega \cos \varphi & -\omega \sin \varphi \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\Omega}_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \\ \dot{\mathbf{C}}_{21} &= \mathbf{C}_{21} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{21} \\ \ddot{\mathbf{C}}_{21} &= \begin{bmatrix} -\alpha \sin \varphi - \omega^2 \cos \varphi & -\alpha \cos \varphi + \omega^2 \sin \varphi \\ \alpha \cos \varphi - \omega^2 \sin \varphi & -\alpha \sin \varphi - \omega^2 \cos \varphi \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \ddot{\mathbf{C}}_{21} &= \mathbf{C}_{21} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{21}^2 + \mathbf{C}_{21} \cdot \mathbf{A}_{21}\end{aligned}$$

Poloha auta B v souřadné soustavě 2 je dána poloměrem zatáčky. Vzhledem k této souřadné soustavě se auto nepohybuje, pohyb auta je uvažován ve vzájemném pohybu souřadných soustav 1 a 2.

$$\mathbf{r}_2^B = \begin{bmatrix} R^B \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pro porovnání pohybu auta A a B je třeba převést pohyb auta B do souřadné soustavy 1. Transformační rovnice jsou:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1^B &= \mathbf{C}_{21} \cdot \mathbf{r}_2^B \\ \mathbf{r}_1^B &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R^B \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{r}_1^B &= \begin{bmatrix} R^B \cos \varphi \\ R^B \sin \varphi \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}_1^B &= \dot{\mathbf{C}}_{21} \cdot \mathbf{r}_2^B + \mathbf{C}_{21} \cdot \mathbf{v}_2^B \\ \mathbf{v}_1^B &= \mathbf{C}_{21} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{21} \cdot \mathbf{r}_2^B + \mathbf{C}_{21} \cdot \mathbf{v}_2^B \\ \mathbf{v}_1^B &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R^B \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}_1^B &= \begin{bmatrix} -R^B \omega \sin \varphi \\ R^B \omega \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v^B \sin \varphi \\ v^B \cos \varphi \end{bmatrix} \\ \mathbf{a}_1^B &= \ddot{\mathbf{C}}_{21} \cdot \mathbf{r}_2^B + 2\dot{\mathbf{C}}_{21} \cdot \mathbf{v}_2^B + \mathbf{C}_{21} \cdot \mathbf{a}_2^B \\ \mathbf{a}_1^B &= (\mathbf{C}_{21} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{21}^2 + \mathbf{C}_{21} \cdot \mathbf{A}_{21}) \cdot \mathbf{r}_2^B + 2\mathbf{C}_{21} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{21} \cdot \mathbf{v}_2^B + \mathbf{C}_{21} \cdot \mathbf{a}_2^B \\ \mathbf{a}_1^B &= \left(\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} R^B \\ 0 \end{bmatrix} + \\ &+ 2 \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{a}_1^B &= \begin{bmatrix} -R^B \omega^2 \cos \varphi \\ -R^B \omega^2 \sin \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_n^B \cos \varphi \\ -a_n^B \sin \varphi \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Zdánlivá rychlost a zrychlení se určí porovnáním

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1^{BA} &= \mathbf{v}_1^B - \mathbf{v}_1^A \\ \mathbf{v}_1^{BA} &= \begin{bmatrix} -v^B \sin \varphi \\ v^B \cos \varphi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -v^A \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^A - v^B \sin \varphi \\ v^B \cos \varphi \end{bmatrix} \\ \mathbf{a}_1^{BA} &= \mathbf{a}_1^B - \mathbf{a}_1^A \\ \mathbf{a}_1^{BA} &= \begin{bmatrix} -a_n^B \cos \varphi \\ -a_n^B \sin \varphi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -a^A \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^A - a_n^B \cos \varphi \\ -a_n^B \sin \varphi \end{bmatrix}\end{aligned}$$

