

Zadání

Jakým konstantním úhlovým zrychlením α se musí rozbíhat setrvačnick, aby se jeho otáčky zvýšily během 70 obrátek z $n_1 = 80 \text{ min}^{-1}$ na $n_2 = 130 \text{ min}^{-1}$?

Řešení

Při rotačním pohybu se podle soustavy SI úhlová rychlost měří v $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, otáčky je tedy nejprve nutno převést:

$$\begin{aligned}\omega &= 2\pi f = 2\pi \frac{n}{60} = \frac{\pi n}{30} \\ \omega_1 &= \frac{\pi n_1}{30} = \frac{\pi \cdot 80}{30} = \frac{8}{3}\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \\ \omega_2 &= \frac{\pi n_2}{30} = \frac{\pi \cdot 130}{30} = \frac{13}{3}\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}\end{aligned}$$

70 obrátek odpovídá úhlu:

$$\varphi = 2\pi n = 2\pi \cdot 70 = 140\pi$$

Nejjednodušší způsob, jak najít potřebné zrychlení, je, když se úhlová rychlost uvažuje jako funkce úhlu, tedy $\omega = f(\varphi)$. Pak se využije vzorec

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{d(\omega^2)}{d\varphi}$$

Pro získání řešení se oddělí φ a ω a integruje se:

$$\begin{aligned}\alpha d\varphi &= \frac{1}{2} d(\omega^2) \\ \alpha \int_0^\varphi d\varphi &= \frac{1}{2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} d(\omega^2) \\ \alpha \varphi &= \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2}\end{aligned}$$

Poznámka:

K tomuto výsledku se lze dostat i při použití druhého vzorce pro α

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\omega d\omega}{d\varphi} \\ \alpha d\varphi &= \omega d\omega \\ \alpha \int_0^\varphi d\varphi &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega d\omega \\ \alpha \varphi &= \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2}\end{aligned}$$

Výsledné α pak je

$$\alpha = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\varphi} = \frac{\left(\frac{13}{3}\pi\right)^2 - \left(\frac{8}{3}\pi\right)^2}{2 \cdot 140\pi} = \frac{\pi}{24} = 0.131 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$$