

Zadání

Plavec se snaží dostat přes řeku širokou $w = 200$ m. Plave rychlostí $v_p = 1$ m · s⁻¹ napříč proudem. Rychlost proudění řeky se mění podle vzdálenosti od břehu s kvadratickou závislostí, přičemž u břehu má proud nulovou rychlost, uprostřed koryta 2 m · s⁻¹. Jaké zrychlení plavci proud uděluje ve vzdálenosti $s_1 = 25$ m? Jak daleko po proudu řeka plavce odnese?

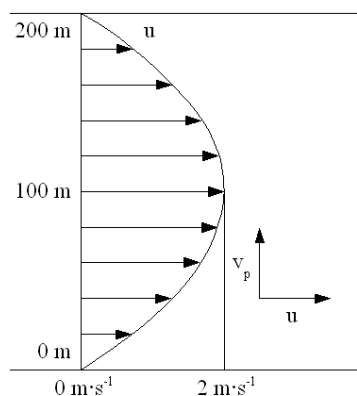
Řešení

Pro řešení této úlohy je třeba znát závislost rychlosti proudu u na vzdálenosti plavce od břehu s . Je kvadratická, má tedy obecný tvar $u = As^2 + Bs + C$. Konstanty A , B a C se spočítají dosazením známých velikostí proudění, které jsou 0 m · s⁻¹ ve vzdálenosti 0 m, 2 m · s⁻¹ ve vzdálenosti 100 m a 0 m · s⁻¹ ve vzdálenosti 200 m.

$$\begin{aligned}u &= As^2 + Bs + C \\0 &= A \cdot 0^2 + B \cdot 0 + C \\2 &= A \cdot 100^2 + B \cdot 100 + C \\0 &= A \cdot 200^2 + B \cdot 200 + C\end{aligned}$$

Vyřešením této soustavy rovnic je:

$$\begin{aligned}A &= -2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \\B &= 4 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1} \\C &= 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\u &= -2 \cdot 10^{-4} \cdot s^2 + 4 \cdot 10^{-2} \cdot s\end{aligned}$$



Zrychlení, které řeka plavci uděluje, se určí:

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{2} \frac{d(u^2)}{ds} \\a &= \frac{1}{2} \frac{d[(-2 \cdot 10^{-4} \cdot s^2 + 4 \cdot 10^{-2} \cdot s)^2]}{ds} \\a &= \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (4 \cdot 10^{-8} \cdot s^4 - 16 \cdot 10^{-6} \cdot s^3 + 16 \cdot 10^{-4} \cdot s^2) \\a &= \frac{1}{2} (16 \cdot 10^{-8} \cdot s^3 - 48 \cdot 10^{-6} \cdot s^2 + 32 \cdot 10^{-4} \cdot s) \\a &= 8 \cdot 10^{-8} \cdot s^3 - 24 \cdot 10^{-6} \cdot s^2 + 16 \cdot 10^{-4} \cdot s \\a &= 8 \cdot 10^{-8} \cdot 25^3 - 24 \cdot 10^{-6} \cdot 25^2 + 16 \cdot 10^{-4} \cdot 25 = 2.625 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}\end{aligned}$$

Pro zjištění, jak daleko řeka plavce strhne, se musí nejprve zjistit, za jak dlouho ji plavec přeplyne (T) a jak daleko od břehu je v závislosti na čase. Platí:

$$\begin{aligned}s &= v_p t \\T &= \frac{w}{v_p} = \frac{200}{1} = 200 \text{ s}\end{aligned}$$

Vzdálenost L , o kterou řeka plavce odnese, se určí dosazením za s a integrací:

$$\begin{aligned}
 u = \frac{dl}{dt} &= -2 \cdot 10^{-4} \cdot s^2 + 4 \cdot 10^{-2} \cdot s \\
 \frac{dl}{dt} &= -2 \cdot 10^{-4} \cdot (v_p t)^2 + 4 \cdot 10^{-2} \cdot v_p t \\
 dl &= (-2 \cdot 10^{-4} \cdot v_p^2 t^2 + 4 \cdot 10^{-2} \cdot v_p t) dt \\
 \int_0^L dl &= \int_0^T (-2 \cdot 10^{-4} \cdot v_p^2 t^2 + 4 \cdot 10^{-2} \cdot v_p t) dt \\
 L &= -2 \cdot 10^{-4} \cdot v_p^2 \frac{T^3}{3} + 4 \cdot 10^{-2} \cdot v_p \frac{T^2}{2} \\
 L &= -\frac{2}{3} \cdot 10^{-4} \cdot v_p^2 T^3 + 2 \cdot 10^{-2} \cdot v_p T^2 \\
 L &= -\frac{2}{3} \cdot 10^{-4} \cdot 1^2 \cdot 200^3 + 2 \cdot 10^{-2} \cdot 1 \cdot 200^2 = 266.67 \text{ m}
 \end{aligned}$$