

## Zadání

Bod se pohybuje po logaritmické spirále ( $\rho = ce^{b\varphi}$ ), přičemž pro úhel  $\varphi$  platí  $\varphi = kt$ . Jaká bude velikost rychlosti a zrychlení v čase  $t = 2$  s. Ostatní konstanty jsou  $k = 3 \text{ s}^{-1}$ ,  $c = 1 \text{ m}$ ,  $b = 2$

## Řešení

Do vztahu pro poloměr  $\rho$  se dosadí za úhel  $\varphi$ . Tím se získá  $\rho$  jako funkce času

$$\rho = ce^{bkt}$$

Pro určení rychlosti a zrychlení je potřeba určit první a druhé časové derivace  $\rho$  a  $\varphi$ :

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= k \\ \ddot{\varphi} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= cbke^{bkt} \\ \ddot{\rho} &= cb^2k^2e^{bkt}\end{aligned}$$

Velikost rychlosti se získá dosazením do vztahu pro velikost rychlosti v polárních souřadnicích:

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho \cdot \dot{\varphi})^2} \\ v &= \sqrt{(cbke^{bkt})^2 + (ce^{bkt} \cdot k)^2} \\ v &= \sqrt{c^2b^2k^2(e^{bkt})^2 + c^2k^2(e^{bkt})^2} \\ v &= cke^{bkt}\sqrt{b^2 + 1} = 1 \cdot 3 \cdot e^{2 \cdot 3 \cdot 2}\sqrt{2^2 + 1} = 1.092 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}\end{aligned}$$

Velikost zrychlení lze vypočítat obdobně:

$$\begin{aligned}a &= \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho \cdot \dot{\varphi}^2) + (\rho \cdot \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \cdot \dot{\varphi})^2} \\ a &= \sqrt{(cb^2k^2e^{bkt} - ce^{bkt} \cdot k^2)^2 + (ce^{bkt} \cdot 0 + 2cbke^{bkt} \cdot k)^2} \\ a &= \sqrt{c^2b^4k^4(e^{bkt})^2 - 2c^2b^2k^4(e^{bkt})^2 + c^2k^4(e^{bkt})^2 + 4c^2b^2k^4(e^{bkt})^2} \\ a &= ck^2e^{bkt}\sqrt{b^4 - 2b^2 + 1 + 4b^2} \\ a &= ck^2e^{bkt}\sqrt{b^4 + 2b^2 + 1} \\ a &= ck^2e^{bkt}(b^2 + 1) = 1 \cdot 3^2 \cdot e^{2 \cdot 3 \cdot 2}(2^2 + 1) = 7.324 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}\end{aligned}$$

## Bonus - okamžitý poloměr trajektorie

Okamžitý poloměr trajektorie se v polárních souřadnicích počítá podobně jako v kartézských souřadnicích, jak to bylo řešeno v minulých příkladech. Pro tečné zrychlení  $a_t$  platí:

$$\begin{aligned}a_t &= \frac{dv}{dt} \\a_t &= \frac{d}{dt} \left( cke^{bkt} \sqrt{b^2 + 1} \right) \\a_t &= cbk^2 e^{bkt} \sqrt{b^2 + 1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot e^{2 \cdot 3 \cdot 2} \sqrt{2^2 + 1} = 6.551 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}\end{aligned}$$

Když je známé  $a$  i  $a_t$ , lze z nich určit  $a_n$ :

$$\begin{aligned}a_n &= \sqrt{a^2 - a_t^2} \\a_n &= \sqrt{c^2 k^4 (e^{bkt})^2 (b^2 + 1)^2 - c^2 b^2 k^4 (e^{bkt})^2 (b^2 + 1)} \\a_n &= ck^2 e^{bkt} \sqrt{(b^2 + 1)^2 - b^2 (b^2 + 1)} \\a_n &= ck^2 e^{bkt} \sqrt{b^4 + 2b^2 + 1 - b^4 - b^2} \\a_n &= ck^2 e^{bkt} \sqrt{b^2 + 1} = 1 \cdot 3^2 \cdot e^{2 \cdot 3 \cdot 2} \sqrt{2^2 + 1} = 3.275 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}\end{aligned}$$

A poloměr pak je:

$$\begin{aligned}R &= \frac{v^2}{a_n} \\R &= \frac{\left( cke^{bkt} \sqrt{b^2 + 1} \right)^2}{ck^2 e^{bkt} \sqrt{b^2 + 1}} \\R &= \frac{c^2 k^2 (e^{bkt})^2 (b^2 + 1)}{ck^2 e^{bkt} \sqrt{b^2 + 1}} \\R &= ce^{bkt} \sqrt{b^2 + 1} = 1 \cdot e^{2 \cdot 3 \cdot 2} \sqrt{2^2 + 1} = 3.639 \cdot 10^5 \text{ m}\end{aligned}$$