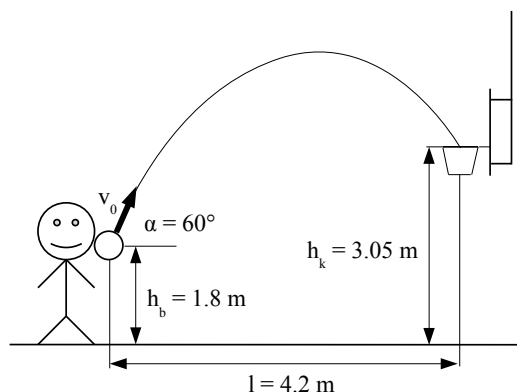


Zadání

Basketbalista háže trestný hod. Jakou rychlostí má hodit míč, aby trefil koš, když háže pod úhlem $\alpha = 60^\circ$? Míč háže z výšky hlavy, tedy $h_b = 1.8$ m, obroučka je ve výšce $h_k = 3.05$ m nad zemí. Vzdálenost mezi čarou trestného hoďu a středem koše je $l = 4.2$ m. Neuvažuje se odpor vzduchu. Tíhové zrychlení je $g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Jak dlouho míč letí? Jaký je poloměr trajektorie letu v čase $t = 0.5$ s?



Řešení

Jedná se o šikmý vrh. Tento pohyb se řeší jako křivočarý pohyb v pravoúhlých souřadnicích. Ve vodorovném směru se míč pohybuje s konstantní rychlostí, ve svislém směru s konstantním zrychlením. Pohybové rovnice jsou:

$$x = x_0 + v_{x0}t$$

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t$$

$$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$y = h_b + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

Z vodorovného směru se určí čas, za který míč doletí do koše, jako funkci rychlosti v_0 :

$$l = v_0 \cos \alpha \cdot t$$

$$t = \frac{l}{v_0 \cos \alpha}$$

Po dosazení do svislého směru lze stanovit požadovanou počáteční rychlost:

$$h_k = h_b + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$h_k = h_b + v_0 \sin \alpha \cdot \frac{l}{v_0 \cos \alpha} - \frac{1}{2}g \left(\frac{l}{v_0 \cos \alpha} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
h_k - h_b &= l \operatorname{tg} \alpha - \frac{gl^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \\
\frac{gl^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} &= h_b - h_k + l \operatorname{tg} \alpha \\
v_0^2 &= \frac{gl^2}{2 \cos^2 \alpha \cdot (h_b - h_k + l \operatorname{tg} \alpha)} \\
v_0 &= \sqrt{\frac{gl^2}{2 \cos^2 \alpha \cdot (h_b - h_k + l \operatorname{tg} \alpha)}} \\
v_0 &= \sqrt{\frac{9.81 \cdot 4.2^2}{2 \cos^2 60^\circ \cdot (1.8 - 3.05 + 4.2 \operatorname{tg} 60^\circ)}} = 7.579 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}
\end{aligned}$$

Zpětným dosazením se určí čas:

$$t = \frac{l}{v_0 \cos \alpha} = \frac{4.2}{7.579 \cos 60^\circ} = 1.108 \text{ s}$$

Pro stanovení poloměru se nejprve určí v_x , v_y , a_x a a_y :

$$\begin{aligned}
v_x &= \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha \\
v_y &= \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt \\
a_x &= \frac{dv_x}{dt} = 0 \\
a_y &= \frac{dv_y}{dt} = -g
\end{aligned}$$

Velikosti rychlosti a zrychlení:

$$\begin{aligned}
v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\
v &= \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt)^2} \\
v &= \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + v_0^2 \sin^2 \alpha - 2v_0 \sin \alpha \cdot gt + g^2 t^2} \\
v &= \sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt \sin \alpha + g^2 t^2} \\
v &= \sqrt{7.579^2 - 2 \cdot 7.579 \cdot 9.81 \cdot 0.5 \sin 60^\circ + 9.81^2 \cdot 0.5^2} = 4.137 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\
a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \\
a &= \sqrt{0^2 + (-g)^2} \\
a &= g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}
\end{aligned}$$

Tečné zrychlení:

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

$$a_t = \frac{2g^2t - 2v_0g \sin \alpha}{2\sqrt{v_0^2 - 2v_0gt \sin \alpha + g^2t^2}}$$

$$a_t = \frac{2 \cdot 9.81^2 \cdot 0.5 - 2 \cdot 7.579 \cdot 9.81 \sin 60^\circ}{2\sqrt{7.579^2 - 2 \cdot 7.579 \cdot 9.81 \cdot 0.5 \sin 60^\circ + 9.81^2 \cdot 0.5^2}} = -3.934 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Normálové zrychlení:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{9.81^2 - (-3.934)^2} = 8.987 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Okamžitý poloměr letu:

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{4.137^2}{8.987} = 1.904 \text{ m}$$