

Zadání

Bod se pohybuje po trajektorii popsané rovnicemi $x = 2t^3 - 5t$, $y = 5\sin 2t$. Určete velikost rychlosti, velikost zrychlení a okamžitý poloměr trajektorie v čase $t = 2$ s.

Řešení

Nejprve se určí jednotlivé složky rychlosti a zrychlení:

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 5 \\v_y &= \frac{dy}{dt} = 10 \cos 2t \\a_x &= \frac{dv_x}{dt} = 12t \\a_y &= \frac{dv_y}{dt} = -20 \sin 2t\end{aligned}$$

Velikosti rychlosti a zrychlení se vypočítají složením jednotlivých složek:

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\v &= \sqrt{(6t^2 - 5)^2 + (10 \cos 2t)^2} \\v &= \sqrt{36t^4 - 60t^2 + 25 + 100 \cos^2 2t} \\v &= \sqrt{36 \cdot 2^4 - 60 \cdot 2^2 + 25 + 100 \cos^2 2 \cdot 2} = 20.093 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \\a &= \sqrt{(12t)^2 + (-20 \sin 2t)^2} \\a &= \sqrt{144t^2 + 400 \sin^2 2t} \\a &= \sqrt{144 \cdot 2^2 + 400 \sin^2 2 \cdot 2} = 28.374 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}\end{aligned}$$

Pro stanovení okamžitého poloměru trajektorie se postupuje následujícím způsobem: Nejprve se počítá tečné zrychlení, jako časová změna velikosti rychlosti:

$$\begin{aligned}a_t &= \frac{dv}{dt} \\a_t &= \frac{1}{2\sqrt{(6t^2 - 5)^2 + (10 \cos 2t)^2}} \left[2(6t^2 - 5) 12t + 2(10 \cos 2t)(-20 \sin 2t) \right] \\a_t &= \frac{(6t^2 - 5) 12t - 200 \cos 2t \sin 2t}{\sqrt{(6t^2 - 5)^2 + (10 \cos 2t)^2}} \\a_t &= \frac{72t^3 - 60t - 100 \sin 4t}{\sqrt{(6t^2 - 5)^2 + (10 \cos 2t)^2}} \\a_t &= \frac{72 \cdot 2^3 - 60 \cdot 2 - 100 \sin 4 \cdot 2}{\sqrt{(6 \cdot 2^2 - 5)^2 + (10 \cos 2 \cdot 2)^2}} = 17.771 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}\end{aligned}$$

Normálové zrychlení se vyvodí ze vztahu pro velikost zrychlení v přirozených souřadnicích:

$$\begin{aligned}a &= \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \\a^2 &= a_t^2 + a_n^2 \\a_n^2 &= a^2 - a_t^2 \\a_n &= \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{28.374^2 - 17.771^2} = 22.120 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}\end{aligned}$$

Zbývá už jen určit okamžitý poloměr trajektorie:

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{v^2}{R} \\R &= \frac{v^2}{a_n} = \frac{20.093^2}{22.120} = 18.251 \text{ m}\end{aligned}$$