

Prostým lidem koluje hádanka:

Z bodu A směrem k bodu B, domů, vyjde muž se psem na 20 km dlouhou cestu rychlostí 4 km za hodinu. Společně s ním vyběhne pes a běží až k domovu. Tam se otočí a běží zpět naproti pánovi, který za tu dobu popošel o kus dále. U pána se opět otočí a běží k domovu a zpět a tak pořád dokola. Pes běhá rychlostí 30 km za hodinu. Otázka: Kolik kilometrů naběhá pes?

Pro studenty VUT je samozřejmě taková hádanka moc snadná, proto si ji mírně upravíme:

Z bodu A směrem k bodu B, domů, vyjde muž se psem na 20 km dlouhou cestu počáteční rychlostí 4 km za hodinu.

Blíží se déšť a člověk proto podvědomě plynule zrychluje tak, že za každou hodinu se zvýší jeho rychlost o 1,5 km/h. Pes zpočátku běží také rychlostí 4 km/h, ale čím je jeho pán domovu blíže, tím rychleji pejsek běží. Když je člověk o 1 km blíže domovu, pes běží už o 0,5 km/h rychleji. Platí stejný princip pendlování psa mezi pánem a domovem, jako v předchozí verzi hádanky. Kolik km uběhne pes, než pán dojde domů? Jak dlouho jim cesta bude trvat?

Stručný rozbor: Člověk zrychluje plynule, čili funkce rychlosti v čase bude lineární, jeho zrychlení je tedy konstantní. Rychlost psa je funkcí polohy člověka, opět lineární. Viz dále určení konstant.

Pro pohyb člověka platí:

$$v_{\varepsilon} = v_0 + k_1 t$$

$$a = k_1$$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$v dt = dx$$

$$\int_0^{t_{\varepsilon}} v dt = \int_0^{x_{\varepsilon}} dx$$

$$\int_0^{t_{\varepsilon}} (v_0 + k_1 t) dt = \int_0^{x_{\varepsilon}} dx$$

$$v_0 t_{\varepsilon} + k_1 \frac{t_{\varepsilon}^2}{2} = x_{\varepsilon}$$

$$\frac{k_1}{2} t_{\varepsilon}^2 + v_0 t_{\varepsilon} - x_{\varepsilon} = 0$$

$$\left[v_0 = 1,11 \text{ ms}^{-1}; k_1 = 1,1574 \text{e}^{-4}; x_{\varepsilon} = 20000 \text{ m} \right]$$

$$t_{\varepsilon} = 1,13279 \text{e}^4 \text{ s}$$

Pro pohyb psa platí:

$$v_p = v_0 + k_2 x_\varepsilon$$

$$v_p = v_0 + k_2 \left(v_0 t + k_1 \frac{t^2}{2} \right)$$

$$v_p = v_0 + k_2 v_0 t + k_2 k_1 \frac{t^2}{2}$$

$$\int_0^{t_\varepsilon} v_p dt = \int_0^{x_p} dx$$

$$\int_0^{t_\varepsilon} v_0 + k_2 v_0 t + k_2 k_1 \frac{t^2}{2} dt = \int_0^{x_p} dx$$

$$v_0 t_\varepsilon + \frac{k_2 v_0}{2} t_\varepsilon^2 + k_2 k_1 \frac{t_\varepsilon^3}{6} = x_p$$

$$\left[v_0 = 1,11 \text{ ms}^{-1}; k_1 = 1,1574 e^{-4}; k_2 = 1,388 e^{-4}; t_\varepsilon = 1,13279 e^4 \text{ s} \right]$$

$$x_p = 2,6351 e^4 \text{ m}$$

Stanovení k_1 a k_2 :

Plynule zrychluje $\rightarrow$ v čase kons. zrychlení $a_\varepsilon = k_1$.

$$a_\varepsilon = k_1 = 1,5 \frac{\text{km}}{\text{h}^2} = 0,4166 \frac{\text{m}}{\text{sh}} = \frac{0,4166}{3600} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1,1574 e^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Rychlost psa je závislá na poloze člověka $v_p = f(x_\varepsilon)$,

konkrétně jde o lin záv.: $v_p = v_0 + k_2 x_\varepsilon$

Po prvním km platí : $4 + 0,1388 = 4 + k_2 1000$

$$\left[\Delta v = 0,5 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 0,1388 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

$$k_2 = \frac{0,1388}{1000} = 1,388 e^{-4}$$