

Zadání

Nákladní vlak jede rychlostí $v_N = 45 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Po stejné koleji jede rychlík, který jede rychlostí $v_{R0} = 135 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Strojvedoucí rychlíku si nákladního vlaku všimne, když je ve vzdálenosti $s_{N0} = 100 \text{ m}$ za ním a spustí rychlobrzdu, která zpomaluje rychlík se zrychlením $a_R = -3.12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Dojde k nehodě? Pokud ano, jaká bude rychlost srážky, tedy rozdíl rychlostí obou vlaků v okamžiku nárazu?

Řešení

Rychlík se pohybuje rovnoměrně zrychleně, jeho rychlost po spuštění brzdy je:

$$\begin{aligned}a_R &= \frac{dv_R}{dt} \\dv_R &= a_R dt \\ \int_{v_{R0}}^{v_R} dv_R &= \int_0^t a_R dt \\v_R - v_{R0} &= a_R t \\v_R &= a_R t + v_{R0}\end{aligned}$$

Dráha, kterou rychlík urazí od začátku pohybu se měří od nuly a je:

$$\begin{aligned}v_R &= \frac{ds_R}{dt} \\ds_R &= (a_R t + v_{R0}) dt \\ \int_0^{s_R} ds_R &= \int_0^t (a_R t + v_{R0}) dt \\s_R &= \frac{1}{2} a_R t^2 + v_{R0} t\end{aligned}$$

Nákladní vlak se pohybuje s konstantní rychlostí, má ale náskok $s_{N0} = 100 \text{ m}$:

$$\begin{aligned}v_N &= \frac{ds_N}{dt} \\ds_N &= v_N dt \\ \int_{s_{N0}}^{s_N} ds_N &= \int_0^t v_N dt \\s_N - s_{N0} &= v_N t \\s_N &= v_N t + s_{N0}\end{aligned}$$

Když zjišťujeme, zda se vlaky srazily, zjišťujeme, zda byly v jeden okamžik na stejném místě:

$$\begin{aligned}s_R &= s_N \\ \frac{1}{2} a_R t^2 + v_{R0} t &= v_N t + s_{N0} \\ \frac{1}{2} a_R t^2 + (v_{R0} - v_N) t - s_{N0} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t &= \frac{v_N - v_{R0} \pm \sqrt{(v_{R0} - v_N)^2 + 2a_R s_{N0}}}{a_R} \\
t &= \frac{12.5 - 37.5 \pm \sqrt{(37.5 - 12.5)^2 + 2 \cdot (-3.12) \cdot 100}}{-3.12} \\
t_{n1} &= 7.692 \text{ s} \\
t_{n2} &= 8.333 \text{ s}
\end{aligned}$$

Kvadratická rovnice, z které se určuje t , může mít 0, 1 nebo 2 kořeny. Když nemá kořen, znamená to, že vlaky se nikdy neobjevily na stejném místě, takže se nesrazily. Jestliže má jeden kořen, znamená to, že byly právě v jeden okamžik na stejném místě. To se stane, když rychlík dokáže přesně zbrzdit, vlaky se jen letmo dotknou a rychlík zastaví. Havárie se stane tehdy, když má rovnice dva kořeny.

Situaci při existenci dvou kořenů lze naznačit, jedou-li oba vlaky každý po své koleji. Rychlík jede nejprve za nákladním vlakem. Při čase, který je prvním řešením rovnice, jsou poprvé vedle sebe a rychlík je rychlejší než nákladní vlak. Dostane se tedy před něj. Protože však dále zpomaluje, je později pomalejší než nákladní vlak a ten ho začne dohánět. Okamžik, kdy jsou znovu vedle sebe, je druhým kořenem rovnice. Poté rychlík zastaví a nákladní vlak odjede.

Pokud však vlaky jedou po jedné koleji, rychlík se nemůže dostat před nákladní vlak a dojde k nárazu. To je tento případ. Kořeny kvadratické rovnice jsou t_{n1} a t_{n2} a platí $t_{n1} < t_{n2}$. Rychlost nárazu pak je:

$$\begin{aligned}
v_n &= v_{R0} + a_R t_{n1} - v_N \\
v_n &= 37.5 - 3.12 \cdot 7.692 - 12.5 = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}
\end{aligned}$$