

Zadání

Bod se pohybuje z klidu se zrychlením daným vztahem $a = g - kv$, kde $g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ a $k = 0.2 \text{ s}^{-1}$. Určete jakou bude mít rychlost v čase $t = 10 \text{ s}$ a jakou urazí dráhu?

Řešení

Časová závislost rychlosti se najde řešením diferenciální rovnice

$$a = \frac{dv}{dt} = g - kv$$

Je třeba oddělit rychlost v na jednu stranu rovnice a čas t na druhou stranu rovnice.

$$\frac{dv}{g - kv} = dt$$

Každá strana rovnice se integruje. Těleso se pohybuje z klidu, tedy $v_0 = 0$ a čas se měří od nuly, tedy $t_0 = 0$.

$$\begin{aligned}\int_0^v \frac{dv}{g - kv} &= \int_0^t dt \\ \left[-\frac{1}{k} \ln(g - kv) \right]_0^v &= [t]_0^t \\ -\frac{1}{k} \ln(g - kv) - \left(-\frac{1}{k} \ln g \right) &= t \\ -\frac{1}{k} \ln(g - kv) + \frac{1}{k} \ln g &= t \\ \ln(g - kv) - \ln g &= -kt \\ \ln\left(\frac{g - kv}{g}\right) &= -kt \\ \frac{g - kv}{g} &= e^{-kt} \\ 1 - \frac{k}{g}v &= e^{-kt} \\ \frac{k}{g}v &= 1 - e^{-kt} \\ v &= \frac{g}{k} (1 - e^{-kt}) \\ v &= \frac{9.81}{0.2} (1 - e^{-0.2 \cdot 10}) = 42.412 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}\end{aligned}$$

Poloha se určí integrací rychlosti. Dráha i čas se měří od nuly, tedy $x_0 = 0$, $t_0 = 0$.

$$\begin{aligned}v = \frac{dx}{dt} &= \frac{g}{k} (1 - e^{-kt}) \\ dx &= \frac{g}{k} (1 - e^{-kt}) dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^x dx &= \int_0^t \frac{g}{k} (1 - e^{-kt}) dt \\
[x]_0^x &= \left[\frac{g}{k} \left(t - \left(-\frac{1}{k} \right) e^{-kt} \right) \right]_0^t \\
[x]_0^x &= \left[\frac{g}{k} \left(t + \frac{1}{k} e^{-kt} \right) \right]_0^t \\
x &= \frac{g}{k} \left(t + \frac{1}{k} e^{-kt} \right) - \frac{g}{k} \frac{1}{k} \\
x &= \frac{g}{k} \left(t + \frac{1}{k} e^{-kt} \right) - \frac{g}{k^2} \\
x &= \frac{9.81}{0.2} \left(10 + \frac{1}{0.2} e^{-0.2 \cdot 10} \right) - \frac{9.81}{0.2^2} = 278.44 \text{ m}
\end{aligned}$$