

Zadání

Sprinter běžel trať 100 m. Prvních 20 m běžel s konstantním zrychlením $2.2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Zbývajících 80 m se jeho rychlost už neměnila. Jaký čas měl?

Řešení

První úsek dlouhý $s_1 = 20 \text{ m}$ je pohyb s konstantním zrychlením $a_1 = 2.2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Běžec se rozbíhá z klidu, tedy $v_0 = 0$, a ze startu, tedy $s_0 = 0$.

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{dv}{dt} \\dv &= a_1 dt \\ \int_0^{v_1} dv &= \int_0^{t_1} a_1 dt \\v_1 &= a_1 t_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_1 = \frac{ds}{dt} &= a_1 t \\ds &= a_1 t dt \\ \int_0^{s_1} ds &= \int_0^{t_1} a_1 t dt \\s_1 &= \frac{1}{2} a_1 t_1^2\end{aligned}$$

Do dalšího úseku je třeba znát čas t_1 , za který sprinter uběhne první úsek, a rychlost v_1 na konci prvního úseku.

$$\begin{aligned}s_1 &= \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \\ \frac{2s_1}{a_1} &= t_1^2 \\ t_1 &= \sqrt{\frac{2s_1}{a_1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_1 &= a_1 t_1 \\v_1 &= a_1 \sqrt{\frac{2s_1}{a_1}} \\v_1 &= \sqrt{2a_1 s_1}\end{aligned}$$

Ve druhém úseku sprinter běží rovnoměrnou rychlostí $v_2 = v_1 = \sqrt{2a_1s_1}$. Čas druhého úseku navazuje na čas prvního úseku, tedy $t_{20} = t_1$. Dráha začíná na konci prvního úseku, tedy $s_{20} = s_1$ a končí cílem, tedy vzdáleností $s_2 = 100$ m.

$$\begin{aligned}
 v_2 &= \frac{ds}{dt} \\
 ds &= v_2 dt \\
 \int_{s_1}^{s_2} ds &= \int_{t_1}^{t_2} v_2 dt \\
 s_2 - s_1 &= v_2 (t_2 - t_1) \\
 \frac{s_2 - s_1}{v_2} &= t_2 - t_1 \\
 t_2 &= t_1 + \frac{s_2 - s_1}{v_2} \\
 t_2 &= \sqrt{\frac{2s_1}{a_1}} + \frac{s_2 - s_1}{\sqrt{2a_1s_1}} \\
 t_2 &= \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{2.2}} + \frac{100 - 20}{\sqrt{2 \cdot 2.2 \cdot 20}} = 12.792 \text{ s}
 \end{aligned}$$