



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**Vysoké učení technické v Brně
Fakulta strojního inženýrství
Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky**

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.

MKP v inženýrských výpočtech

Obsah

1. Úvod
2. Základní veličiny a rovnice obecné pružnosti
3. MKP jako variační metoda
4. Prutové prvky
5. Tělesové prvky v rovině a prostoru
6. Desky, stěnodesky a skořepiny
7. Přehled základních typů prvků systému ANSYS
8. Základní soustava rovnic a její řešení
9. Konvergence a odhad chyby řešení
10. Stabilita tenkostěnných konstrukcí
11. MKP v dynamice
12. Vedení tepla a teplotní napjatost
13. Literatura
14. Slovník základních pojmů Č-A, A-Č

1 Úvod

Text *MKP v inženýrských výpočtech* vznikl jako studijní opora stejnojmenného kurzu I. ročníku navazujícího magisterského studia Inženýrské mechaniky a Mechatroniky. Jeho náplní je podrobnější seznámení posluchačů s teorií, algoritmy a praktickým použitím Metody konečných prvků při řešení úloh mechaniky těles. Zejména jde o získání základních znalostí, potřebných při použití MKP v lineárních úlohách pružnosti, dynamiky, vedení tepla a návazné analýze teplotní napjatosti. Tyto poznatky jsou potom v navazujícím kurzu II. ročníku *Nelineární mechanika* rozšířeny i do oblasti materiálových, geometrických a kontaktních nelinearit.

Předmět *MKP v inženýrských výpočtech* probíhá formou přednášek, jejichž základní osnova v hlavních bodech odpovídá předkládanému učebnímu textu, a cvičení, která se odehrávají na počítačové učebně s využitím programového systému ANSYS. Volba konkrétního výukového systému byla dána více faktory – dostupností, rozšířením, uživatelským komfortem, dobrou personální podporou i průběžnými inovacemi systému ANSYS, které mu trvale zaručují jedno z předních míst mezi komerčními systémy MKP. Cvičení však nejsou koncipována jako školení konkrétního systému se systematickou výukou základních příkazů a jejich syntaxí, cílem je seznámení se systémem práce s konečnými prvky tak, aby absolvent kurzu po elementárním zaškolení snadno zvládl přechod na kterýkoli jiný moderní výpočtový systém MKP. Získání praktických zkušeností mají napomoci i ilustrativní příklady u jednotlivých kapitol tohoto textu. Obsahují stručný popis problému s komentovaným vstupním souborem, který lze spustit na kterémkoli PC s instalovaným systémem ANSYS na učebnách a pracovištích FSI. Každý uživatel si může následně provést podrobnější analýzu vstupního souboru a jeho vlastní modifikaci za pomoci on-line helpu [11], který je integrální součástí každé instalace systému ANSYS. Vstupní příkazové soubory všech úloh jsou snadno editovatelné textové soubory, jejichž název má jednotnou strukturu: *prikLxxx.inp*. Jejich spouštění se provádí vypsáním jednoduchého příkazu do příkazového řádku v interaktivním uživatelském režimu systému ANSYS: „ /INP, PRIKLxxx, INP“

Důraz na teoretické i praktické zvládnutí MKP je dán jejím zcela dominantním postavením mezi numerickými metodami v oblasti inženýrských výpočtů. Tohoto postavení bylo vzhledem k univerzálnosti metody dosaženo velmi rychle po jejím vzniku, které bývá často spojováno s rokem 1956 podle data publikace [1], přestože některé myšlenky algoritmu MKP byly publikovány mnohem dříve [2], [20]. Teprve spojení těchto myšlenek s číslicovým počítačem, umožňujícím v 50. letech již dostatečně efektivní řešení větších soustav algebraických rovnic, vedlo k ohromujícímu rozvoji metody. Samotný název metody pochází z roku 1960 a poprvé byl použit v článku [21]. Zejména anglická verze *The Finite Element Method* zdůrazňuje tu skutečnost, že základním stavebním kamenem metody je prvek *konečných rozměrů* – na rozdíl od infinitesimálního pohledu klasické analytické pružnosti, která vychází z představy rovnováhy na *nekonečně malém* elementu.

Rozvoj MKP jako každého oboru lze dobře dokumentovat publikační aktivitou v dané oblasti. Zatímco časopisecké publikace o MKP lze dnes stěží spočítat (např. autor [12] ve své databázi *Makebase* k roku 2000 uvádí cca 107.000 položek), knižních monografií vyšlo asi 470. Mezi nimi je nutno na prvním místě uvést knihu Prof. Zienkiewicze [3], a to hned z několika důvodů. Jednak byla v roce 1967 skutečně první knihou o MKP, dále je v této oblasti nejčastěji citovaným zdrojem a díky množství přepracovaných vydání si stále v literatuře o MKP udržuje přední místo. Poslední verze [4] již představuje úctyhodné čtyřsvazkové kompendium současného stavu rozvoje metody. Další publikace [5]-[7] uvádíme zejména pro jejich didaktické kvality.

Z tuzemských publikací jmenujme především knihu kolektivu brněnských autorů [8]. Její první vydání v roce 1972 odráželo významné postavení tzv. „brněnské školy“ koncem 60. let,

kteřá zejména zásluhou profesorů VUT Zlámala a Ženíška dosáhla mezinárodního věhlasu příspěvkem ke korektní matematické formulaci základů MKP.

Tab.1 Programové systémy MKP

Year	Program name	Developer	URL address
1965	ASKA (PERMAS)	IKOSS GmbH, (INTES),Germany	www.intes.de
	STRUDL	MCAUTO, USA	www.gtstrudl.gatech.edu
1966	NASTRAN	MacNeal-Schwendler Corp., USA	www.macsch.com
1967	BERSAFE	CEGB, UK (restructured in 1990)	
	SAMCEF	Univer. of Liege, Belgium	www.samcef.com
1969	ASAS	Atkins Res.&Devel., UK	www.wsasoft.com
	MARC	MARC Anal. Corp., USA	www.marc.com
	PAFEC	PAFEC Ltd, UK now SER Systems	
	SESAM	DNV, Norway	www.dnv.no
1970	ANSYS	Swanson Anal. Syst., USA	www.ansys.com
	SAP	NISEE, Univ. of California, Berkeley, USA	www.erc.berkeley.edu/tware_and_data
1971	STARDYNE	Mech. Res. Inc., USA	www.reiusa.com
	TITUS (SYSTUS)	CITRA, France; ESI Group	www.systus.com
1972	DIANA	TNO, The Netherlands	www.diana.nl
	WECAN	Westinghouse R&D, USA	
1973	GIFTS	CASA/GIFTS Inc., USA	
1975	ADINA	ADINA R&D, Inc., USA	www.adina.com
	CASTEM	CEA, France	www.castem.org:8001/HomePage.html
	FEAP	NISEE, Univ. of California, Berkeley, USA	www.erc.berkeley.edu/tware_and_data
1976	NISA	Eng. Mech. Res. Corp., USA	www.emrc.com
1978	DYNA2D, DYNA3D	Livermore Softw. Tech. Corp., USA	www.lstc.com
1979	ABAQUS	Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., USA	www.abaqus.com
1980	LUSAS	FEA Ltd., UK	www.lusas.com
1982	COSMOS/M	Structural Res. & Anal. Corp., USA	www.cosmosm.com
1984	ALGOR	Algor Inc., USA	www.algor.com

Rozvoj MKP vedl přirozeně k paralelnímu vzniku velkého množství programů, postavených na bázi algoritmu MKP a vyvíjených zpočátku v univerzitním prostředí v souvislosti s řešením výzkumných úkolů. Už v průběhu 60.let se však stále častěji používalo vyvinutého softwaru k řešení inženýrských problémů, vycházejících přímo z požadavků průmyslové praxe. Zájem o nový výpočtový prostředek pak přirozeně vedl k rozvoji některých programů na čistě komerční bázi. V tabulce 1 je přehled nejznámějších programových systémů MKP. Je dobré si povšimnout, že prakticky všechny mají své kořeny v dobách sálových počítačů a děrných štítků a že je obtížné v současné době prorazit se zcela novým produktem, který za sebou nemá dlouhou historii postupného budování od jednoduchých Fortranských procedur jádra až po softwarově velmi rozsáhlý “obal” uživatelského prostředí pre- a postprocessingu. Výjimkou v tomto směru je systém Pro/MECHANICA, který přichází až v průběhu 90. let s novou koncepcí základního algoritmu MKP.

Na základě sledování současného vývoje se zdá, že postupně dojde k omezení počtu komerčně nabízených systémů, mezi nimiž se nakonec uplatní jen několik nejsilnějších firem. Pokud budeme usuzovat z analýzy citací databáze *Makebase*, pak mezi nejúspěšnější za období 1985-1999 určitě budou patřit systémy ABAQUS, ADINA, ANSYS a NASTRAN.

2 Základní veličiny a rovnice obecné pružnosti

Náplň této kapitoly je podrobně pojednána ve všech dostupných učebnicích a skriptech pružnosti [13] – [15], uvedeme zde proto jen základní fakta, nutná pro pochopení souvislostí s následujícím textem, a to bez podrobného odvozování. Základní úlohou, jejímž řešením se dále budeme zabývat, je tzv. *přímá úloha pružnosti*. Budeme ji formulovat následovně: „Pro těleso se známou geometrií, materiálem, zatížením a vazbami k okolí určete jeho deformaci a napjatost.“

Určení deformace a napjatosti, stručněji označované jako napěťová analýza, je předpokladem k následnému hodnocení mezních stavů konstrukce, které ovšem pro tuto chvíli leží mimo rámec naší pozornosti. Pojmy napjatost a deformace byly dostatečně podrobně rozebrány v Pružnosti, víme tedy, že v obecné prostorové statické úloze představují celkem 15 neznámých funkcí proměnných x, y, z . Jedná se o:

- tři posuvy u, v, w
- šest přetvoření $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$
- a šest napětí $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$.

Tyto funkce jsou navzájem vázány systémem obecných rovnic pružnosti, které musí být splněny uvnitř řešené oblasti. Jsou to rovnice rovnováhy, rovnice fyzikální neboli konstitutivní a rovnice geometrické. Na hranici řešené oblasti musí pak být splněny předepsané okrajové podmínky.

2.1 Rovnice rovnováhy

Tyto rovnice jsou podmínkami rovnováhy elementárního vnitřního prvku, na který kromě složek napětí působí vnější objemová síla (např. gravitační) o složkách o_x, o_y, o_z [$N \cdot m^{-3}$].

Představují vzájemnou vazbu mezi složkami napětí, která musí být splněna vždy bez ohledu na typ materiálu, velikost deformací apod. Uvádíme je pro případ statického zatěžování:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + o_x &= 0 & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + o_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + o_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

2.2 Rovnice geometrické

Jedná se o vztahy vytvářející vazbu mezi složkami posuvů a přetvoření a uvedeme je ve tvaru, použitelném v případě malých přetvoření (řádu 10^{-2} a menším):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.3 Konstitutivní vztahy

Představují vztah mezi deformací a napjatostí. Opět je uvedeme v nejběžnějším tvaru pro lineárně pružný, izotropní Hookovský materiál, jehož vlastnosti jsou určeny dvěma nezávislými materiálovými konstantami - modulem pružnosti v tahu E a Poissonovým číslem μ .

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx}\end{aligned}\quad (2.3)$$

Modul pružnosti ve smyku G není nezávislou materiálovou veličinou a můžeme jej určit ze vztahu

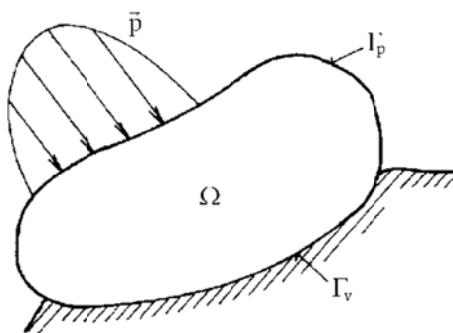
$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (2.4)$$

2.4 Okrajové podmínky

Uvedený systém rovnic musí být doplněn okrajovými podmínkami, které jsou dvojího typu - geometrické a silové. V daném místě a směru na povrchu můžeme vždy předepsat pouze jednu z uvedených podmínek. Geometrické okrajové podmínky vyjadřují zadání posuvů na části povrchu tělesa Γ_v - viz obr.2.1. Tyto posuvy jsou předem známy (z charakteru uložení tělesa, známých posuvů okolních těles apod.), označme je $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$. Potom platí

$$\Gamma_v : u = \bar{u}, v = \bar{v}, w = \bar{w} \quad (2.5)$$

Častý je případ $\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0$, potom hovoříme o homogenních geometrických podmínkách.



Obr.2.1 Řešené těleso

Silové okrajové podmínky vyjadřují rovnováhu mezi vnitřními a vnějšími silami elementárního prvku, ležícího na hranici řešené oblasti Γ_p .

Je-li na Γ_p zadáno vnější plošné zatížení $\mathbf{p}^T = [p_x, p_y, p_z]$ a jednotkový vektor normály k povrchu má složky $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$, pak můžeme psát

$$\begin{aligned}\Gamma_p : \quad p_x &= \sigma_x \alpha_x + \tau_{xy} \alpha_y + \tau_{xz} \alpha_z \\ p_y &= \tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y + \tau_{yz} \alpha_z \\ p_z &= \tau_{xz} \alpha_x + \tau_{yz} \alpha_y + \sigma_z \alpha_z\end{aligned}\quad (2.6)$$

Poznámka: na části povrchu, kde jsme nepředepsali nic, je v úlohách, řešených deformační variantou MKP, implicitně zadána homogenní silová okrajová podmínka [20]. Normálné i

smykové napětí na tomto povrchu by mělo být (při „přesném“ řešení) nulové. To může sloužit ke kontrole přesnosti numerických výsledků, neboť vykreslením normálního napětí na povrchu snadno zkontrolujeme, do jaké míry je tato podmínka na konkrétní síti konečných prvků splněna.

2.5 Přístupy k řešení přímé úlohy pružnosti

Vztahy obecné pružnosti (2.1)–(2.3) představují systém 15 rovnic, postačující spolu s okrajovými podmínkami (2.5)–(2.6) k určení 15 neznámých funkcí posuvů, přetvoření a napětí. Je dokázáno, že pokud se nám podaří nalézt řešení uvedené soustavy rovnic, jedná se o řešení jediné (tzv. Kirchhoffův důkaz jednoznačnosti řešení obecného problému pružnosti, viz např. [15]). Zásadní problém je ovšem takové řešení najít. V průběhu historického vývoje se vyvinula řada přístupů k řešení daného problému, které přehledně rozdělíme podle následujících kritérií: podle použité matematické formulace problému, výběru nezávislých neznámých funkcí a podle způsobu vlastní realizace řešení. Uvedený přehled si nečiní nárok na vyčerpávající a úplný výčet všech možností, spíše jde o zdůraznění hlavních strategií při řešení obecného problému pružnosti.

2.5.1 Hledisko matematické formulace problému

Podle tohoto hlediska můžeme rozdělit základní přístupy na dvě skupiny: *diferenciální* a *variační*. První formuluje náš problém v podobě soustavy diferenciálních rovnic - úpravami systému (2.1)–(2.6). Druhý přístup hledá řešení problému jako stav, v němž energie analyzovaného tělesa dosahuje extrémní (resp. stacionární) hodnoty. O jakou formu energie se jedná a co musí apriorně splňovat hledané funkce pružnosti, to je specifikováno v tzv. variačních principech mechaniky [20]. Tento energetický přístup je aktuální především v souvislosti s numerickými metodami a MKP.

2.5.2 Hledisko výběru nezávislých funkcí pružnosti

V konkrétních úlohách se nikdy neřeší současně všech 15 funkcí pružnosti, ale vzájemným dosazováním obecných rovnic pružnosti se postupně vylučují jednotlivé skupiny neznámých funkcí. Postupně tak dospějeme ke vztahům, obsahujícím obvykle jen jeden typ neznámých funkcí (např. jen posuvy, jen napětí...). Tyto pak označujeme jako nezávislé neznámé funkce. Podle výběru nezávislých neznámých funkcí pak hovoříme o přístupu

- deformačním neznámé jsou složky posuvů
- silovém neznámé jsou složky napětí
- smíšeném neznámé jsou složky napětí i posuvů

2.5.3 Hledisko vlastní realizace řešení

Zde máme dvě základní možnosti. První je řešení *analytické*, kdy hledáme výsledek ve tvaru spojitých funkcí metodami matematické analýzy, využitím integrálního a diferenciálního počtu. Druhá možnost je řešení *numerické*, které převádí problém hledání spojitých funkcí na problém hledání konečného počtu neznámých parametrů, pomocí nichž se hledané funkce přibližně aproximují. Tento přechod je označován jako *diskretizace* spojitého problému.

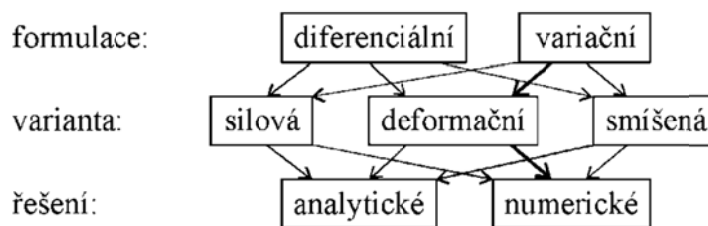
Diskrétní problém je pak řešitelný algebraickými prostředky v konečném počtu kroků na počítači. Právě principiální závislost na počítači je důvodem, že numerické metody se využívají a bouřlivě rozvíjejí teprve od konce 50. let 20. století.

Výhody historicky staršího analytického přístupu jsou jednoznačné: v případě nalezení analytického řešení v uzavřeném tvaru máme k dispozici obecnou funkční závislost mezi vstupními a výstupními veličinami řešeného problému pružnosti. Snadno lze pak posoudit citlivost důležitých výstupních veličin (napětí, posuvů) na změny vstupů (zatížení, geometrie ...). To je velmi výhodné při optimalizaci konstrukce. Základní problém je ale v

tom, že analytické řešení v uzavřeném tvaru je známo jen pro velmi omezenou třídu úloh, zpravidla geometricky jednoduchých tvarů.

Naproti tomu řešení numerické je v zásadě schůdné pro každou matematicky popsatelnou úlohu, jakkoli geometricky a jinak komplikovanou. Faktickým omezením je pouze kapacita dostupného hardwaru a časové nároky na výpočet. Výsledky se ovšem vztahují jen ke konkrétně zadanému případu, jakékoli úpravy, optimalizace apod. vyžadují opakování celého náročného procesu řešení.

S rozvojem počítačů již dnes a zejména v budoucnu jednoznačně převáží při řešení praktických úloh numerické metody. Znalost analytického řešení základních typů úloh pružnosti však přesto zůstane jedním ze základů odborných znalostí výpočtáře. Tvoří totiž základ „inženýrského citu“, nutného k racionálnímu posouzení numerických výsledků komplikovaných problémů praxe. To považujeme za důležité zdůraznit, přestože další výklad se analytickými postupy zabývat nebude. Tři výše uvedená hlediska umožňují rozčlenit postupy řešení problémů obecné pružnosti dle následujícího schématu:



V zásadě lze jednotlivé uvedené přístupy při řešení úloh libovolně kombinovat, existují však určité více frekventované postupy. Ve spojitosti s analytickým řešením je obvyklá diferenciální formulace a deformační nebo silový přístup k výběru nezávislých funkcí pružnosti. U MKP jako numerické metody pak jednoznačně převládá variační formulace a deformační přístup - hovoříme o *deformační variantě MKP*, kde primární neznámé jsou funkce *posuvů*.

Příklad 2.1

Ukažme nyní stručně typické kroky analytického řešení na příkladu jednorozměrného problému, který nám později poslouží i pro ilustraci algoritmu MKP. Prut dle obr.2.2 je zatížen pouze vlastní tíhou, působící ve směru osy prutu. S , L , E , ρ je průřez, délka, modul pružnosti a hustota materiálu prutu, g je tíhové zrychlení.

Jednotlivé rovnice obecné pružnosti se pro jednorozměrný problém redukuje na jednoduché tvary:

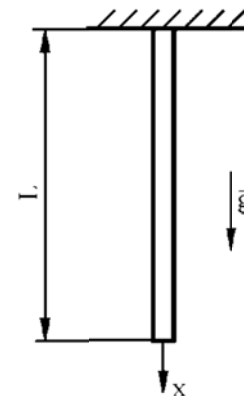
$$\text{rovnice rovnováhy} \quad \frac{d\sigma}{dx} + \rho g = 0 \quad (2.7)$$

$$\text{Hookeův zákon} \quad \sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2.8)$$

$$\text{geometrická rovnice} \quad \varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (2.9)$$

Řešení v posuvech (deformační přístup) spočívá v dosazení (2.9) do (2.8) - vyloučíme ε a následným dosazením do (2.7) - vyloučíme σ . Získáme tak diferenciální rovnici 2. řádu pro neznámý posuv $u(x)$:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\rho g}{E} = 0 \quad (2.10)$$



Obr.2.2 Prut dle příkladu.2.1

s okrajovými podmínkami: $u(0) = 0$, $\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=L} = 0$.

Řešení posuvů je dáno parabolou - viz přerušovaná křivka na obr.3.6:

$$u = \frac{\rho g}{E} \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right)$$

Zpětným dosazením této funkce do (2.9) a (2.8) získáme lineární průběh napětí - viz čárkovaná přímka na obr.3.7:

$$\sigma = \rho g(L - x)$$

3 MKP jako variační metoda

Variační metody v mechanice vycházejí z variačních principů; v případě deformační varianty MKP je východiskem *Lagrangeův variační princip*, který budeme formulovat následovně: „Mezi všemi funkcemi posuvů, které zachovávají spojitost tělesa a splňují geometrické okrajové podmínky, se realizují ty, které udělají celkové potenciální energii Π stacionární hodnotu.“

Lze dokázat (viz [20]), že uvedená stacionární hodnota existuje, je jednoznačná a představuje zároveň minimum Π . Π lze vyjádřit jako

$$\Pi = W - P \quad (3.1)$$

kde W je energie napjatosti tělesa Ω .

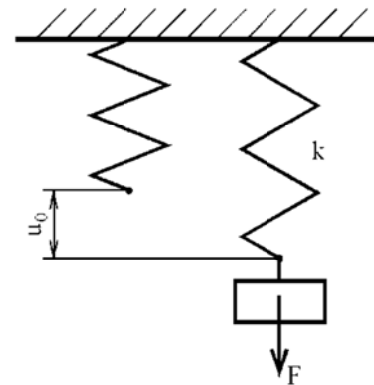
$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (3.2)$$

a P je potenciál vnějšího zatížení

$$P = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{o} dV + \int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{p} dS \quad (3.3)$$

V uvedených vztazích vystupují sloupcové matice

- posuvů $\mathbf{u}^T = [u, v, w]$
- přetvoření $\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}]$
- napětí $\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}]$
- objemového zatížení $\mathbf{o}^T = [o_x, o_y, o_z]$
- plošného zatížení $\mathbf{p}^T = [p_x, p_y, p_z]$



Obr. 3.1 Pružina dle příkladu 3.1

Příklad 3.1

S využitím Lagrangeova variačního principu určete posunutí u_0 koncového bodu pružiny s tuhostí k , zatížené břemenem o tíze $F = m \cdot g$

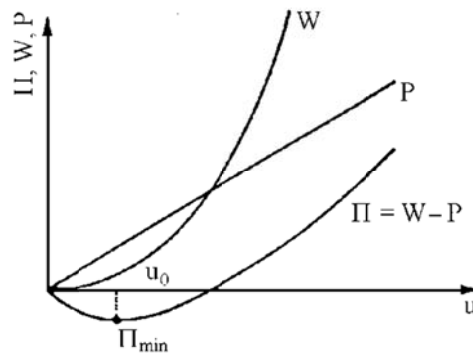
(obr.3.1)

Energie napjatosti akumulovaná v pružině je $W = k \cdot u^2 / 2$, kde u je posun koncového bodu. Vnější zatížení má potenciál $P = F \cdot u$, celková potenciální energie je tedy

$$\Pi = \frac{1}{2} k u^2 - F \cdot u$$

a její stacionární hodnotu najdeme z podmínky

$$\frac{d\Pi}{du} = 0 = k u - F$$



Obr.3.2 Celková potenciální energie zatížené pružiny

Odsud dostaneme známý výsledek $u_0 = F/k$. Tento triviální příklad s jedním stupněm volnosti umožňuje na obr.3.2 názorně ilustrovat, jak skutečný posuv u_0 minimalizuje celkovou potenciální energii. Zároveň ukazuje, jak minimalizací energetické veličiny dospějeme ke stejné rovnici rovnováhy, kterou bychom jinak získali ze součtu silových účinků na uvolněné těleso.

3.1 Diskretizace spojitého problému v MKP - základní myšlenka

Předchozí příklad byl jednoduchý v tom, že celkovou energii bylo možno vyjádřit jen v závislosti na posuvu jediného bodu. Obecně je však Π závislé na spojitých funkcích u, v, w , proměnných x, y, z , z nichž každá reprezentuje nekonečné množství hodnot v nekonečně mnoha bodech řešené oblasti. Abychom úlohu mohli řešit numericky, je nutno každou z funkcí vyjádřit v závislosti na konečném počtu parametrů. V MKP se aproximační funkce posuvů vyjadřují přibližně jako součet předem daných, známých funkcí $N_i(x, y, z)$, $N_j(x, y, z)$, $N_k(x, y, z)$, označovaných jako *bázové funkce*. Ty jsou násobeny neznámými koeficienty u_i, v_j, w_k , které fyzikálně představují složky posuvů v uzlových bodech sítě:

$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^l N_i(x, y, z) \cdot u_i; \quad v(x, y, z) = \sum_{j=1}^m N_j(x, y, z) \cdot v_j; \quad w(x, y, z) = \sum_{k=1}^n N_k(x, y, z) \cdot w_k \quad (3.4)$$

Dosažením této aproximace do výrazu pro celkovou potenciální energii (3.1) přejdeme od vyjádření funkcionálu $\Pi(u, v, w)$, závislého na funkcích, k vyjádření $\Pi(u_1, u_2, u_3, \dots, w_n)$, závislému na konečném počtu parametrů. Podmínka stacionární hodnoty Π vede pak na soustavu rovnic pro určení těchto neznámých parametrů:

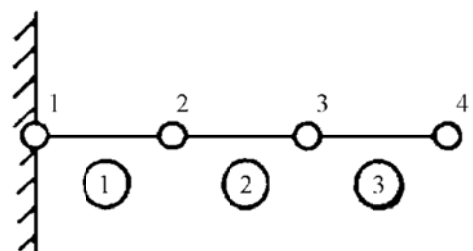
$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial w_n} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow u_1, u_2, \dots, w_n \quad (3.5)$$

Řešením soustavy získáme parametry u_1, u_2, u_3, \dots a tím i aproximace hledaných funkcí posuvů dle (3.4). Uvedený obrat je společný více numerickým metodám, pro MKP je typický způsob konstrukce bázových funkcí, které jsou definovány vždy jen na malé podoblasti řešeného tělesa, odpovídající jednomu prvku. Ukážeme to opět na jednorozměrné úloze dle příkladu 2.1.

3.2 Ilustrace algoritmu MKP na jednorozměrné úloze

3.2.1 Aproximace posuvů nad konečným prvkem

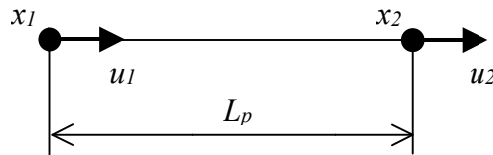
Jak je známo, analýza pomocí MKP vyžaduje rozdělení řešené oblasti na konečný počet podoblastí - prvků - které ji spojitě a jednoznačně vyplňují. Pro každý typ prvku je kromě dimenze a tvaru charakteristický počet a poloha jeho uzlů. To jsou body, v nichž hledáme neznámé parametry řešení dle (3.5). V deformační variantě MKP jsou tyto parametry označovány jako *deformační parametry* a mají fyzikální význam *posuvu*, resp. *natočení* uzlového bodu. Zadáním prvků a uzlů vytváříme na řešené oblasti síť MKP, která hustotou a topologií zásadně ovlivňuje kvalitu výsledku a potřebné kapacity pro řešení. Pro naši ilustrativní úlohu je síť o třech prvcích a čtyřech uzlech uvedena na obr.3.3. Pro přehlednost jsme osu prutu otočili vodorovně, problém zůstává ale stejný jako v příkladu 2.1 - zatížení uvažujeme pouze tahové ve směru osy prutu x. Zabývejme se dále pouze prvkem č.1. Jedná se o nejjednodušší prutový prvek s lineární aproximací posuvu $u(x)$ podélce prvku:



Obr.3.3 Diskretizace

$$u(x) = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\delta} \quad (3.6)$$

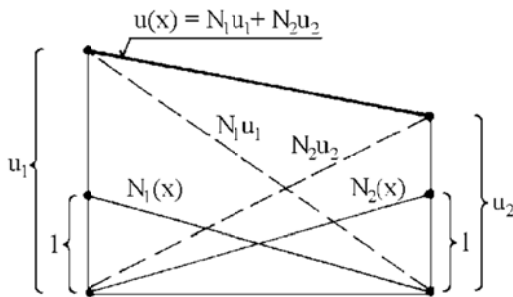
kde $\mathbf{N} = [N_1, N_2]$ je matice bázových (též tvarových) funkcí posuvů a $\boldsymbol{\delta} = [u_1, u_2]^T$ je matice deformačních parametrů; její prvky jsou posuvy uzlových bodů u_1, u_2 , které představují neznámé parametry řešení.



Obr.3.4 Osově namáhaný prutový prvek

Explicitní tvar bázových funkcí je

$$N_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad N_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad (3.7)$$



Obr.3.5 Bázové funkce prutového prvku

kde x_1, x_2 jsou souřadnice uzlových bodů dle obr.3.4. Průběh bázových funkcí nad prvkem uvádí obr.3.5.

Posuv libovolného vnitřního bodu prvku je tedy jednoznačně určen posuvy jeho uzlových bodů, jak je zřejmé roznásobením (3.6):

$$u(x) = N_1(x) \cdot u_1 + N_2(x) \cdot u_2. \quad (3.8)$$

Vztah (3.8) je též uveden na obr.3.5. Připomeňme jen, že vykreslovaná funkce $u(x)$ fyzikálně představuje posuv podél osy x , pouze pro názornost zobrazení jej vynášíme kolmo k x . Stejným způsobem jsou aproximovány i průběhy posuvu $u(x)$ na ostatních prvcích. Sdílení společného uzlu mezi dvěma prvky znamená i sdílení téhož deformačního parametru a tedy automatické zajištění meziprvkové spojitosti posuvu $u(x)$. Po vyřešení úlohy a vyčíslení deformačních parametrů je průběh hledaného posuvu na celé oblasti aproximován počástech lineárně - blíží se analytickému řešení - viz obr.3.6.

3.2.2 Matice tuhosti prvku

Celková potenciální energie Π je integrální veličina, její výslednou hodnotu můžeme tedy získat jako součet příspěvků od jednotlivých prvků

$$\Pi = \sum_{i=1}^3 \Pi_i. \quad (3.9)$$

Na prvku č.1 bude

$$\Pi_1 = W_1 - P_1, \quad (3.10)$$

kde energie napjatosti prvku je

$$W_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} \sigma \varepsilon S dx \quad . \quad (3.11)$$

Napětí i přetvoření ve (3.11) musíme vyjádřit pomocí posuvů. Nejprve využijeme geometrický vztah (2.9), do něhož dosadíme aproximaci (3.6)

$$\varepsilon = \frac{d}{dx}(\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\delta} \quad , \quad (3.12)$$

kde

$$\mathbf{B} = \frac{d\mathbf{N}}{dx} = \frac{1}{x_2 - x_1} [-1, 1] \quad (3.13)$$

je matice udávající tvar funkce přetvoření nad prvkem. Označíme-li délku prvku $L_p = x_2 - x_1$, je

$$\mathbf{B} = \frac{1}{L_p} [-1, 1] \quad . \quad (3.14)$$

Protože matice \mathbf{B} vznikla derivací \mathbf{N} , je při lineární aproximaci posuvů průběh přetvoření nad prvkem konstantní a roven $\varepsilon = (u_2 - u_1)/L_p$. Totéž platí pro napětí - pomocí (2.8) dostaneme

$$\sigma = E \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}^T \cdot \mathbf{B}^T \cdot E \quad . \quad (3.15)$$

Poslední poznámka platí obecně: prvky s lineární aproximací posuvů (i rovinné či prostorové) vždy poskytují výsledky v napětích a přetvořeních po prvcích konstantní – viz obr.3.7.

Dosazením (3.12) a (3.15) do (3.11) po úpravách vyjádříme energii napjatosti prvku č.1 ve tvaru

$$W_1 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T \cdot \left(ES \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx \right) \cdot \boldsymbol{\delta} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T \cdot \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\delta} \quad , \quad (3.16)$$

kde \mathbf{k} je prvková matice *tuhosti*

$$\mathbf{k} = \frac{ES}{L_p} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad . \quad (3.17)$$

Prvky této matice mají - dle názvu - fyzikální rozměr tuhosti.

3.2.3 Matice zatížení prvku

Potenciál vnějšího zatížení našeho prvku ve vztahu (3.10) je

$$P_1 = \int_{x_1}^{x_2} u \rho g S dx \quad . \quad (3.18)$$

Dosazením za $u(x)$ z (3.6) a úpravami vyjádříme potenciál

$$P_1 = \boldsymbol{\delta}^T \cdot \mathbf{f} \quad , \quad (3.19)$$

kde \mathbf{f} je prvková matice *vnějšího zatížení*

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} \rho g S L_p \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad . \quad (3.20)$$

Její prvky představují celkovou objemovou sílu, působící na prvek, rozdělenou na poloviny a soustředěnou do krajních uzlů v podobě uzlových sil. Matice \mathbf{f} tedy zabezpečuje diskretizaci

spojitého zatížení. Obdobně by byla do uzlů rozdělena i případná další zatížení, jako např. u prostorových prvků plošné zatížení povrchu prvku. Všechna zatížení jsou takto soustředěna do uzlů a silová interakce mezi prvky probíhá právě jen prostřednictvím uzlů, přestože uživatel zadává zatížení obvykle jako liniově, plošně nebo prostorově distribuované. Samozřejmě je možno přímo zadat i osamělé síly do uzlů, taková síla je pak zařazena na příslušnou pozici matice \mathbf{f} .

3.2.4 Celkové (globální) matice tuhosti a zatížení

Odvozené matice \mathbf{k} , \mathbf{f} umožňují jednoduše vyjádřit energii napjatosti i potenciál zatížení v závislosti na posuvech prvku č.1. Pro ostatní prvky odvodíme jejich matice analogicky; pokud rozdělíme řešený prut na prvky stejné délky (při konstantních hodnotách E , S , ρ), budou dokonce jejich matice \mathbf{k} , \mathbf{f} identické s prvkem č.1. Pro zjednodušení zápisu budeme toto předpokládat, z hlediska algoritmu metody tento předpoklad není nutný.

Nyní chceme vyjádřit celkový potenciál Π řešeného tělesa. K tomu je vhodné sdružit všechny deformační parametry úlohy do jediné, globální matice deformačních parametrů:

$\mathbf{U} = [u_1, u_2, u_3, u_4]^T$. Chceme-li potom energii napjatosti 1.prvku vyjádřit podobně jako ve vztahu (3.16)

$$W_1 = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{U} , \quad (3.21)$$

je třeba matici tuhosti 1. prvku formálně rozšířit o příslušný počet řádků a sloupců:

$$\mathbf{K}_1 = \frac{ES}{L_p} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (3.22)$$

Snadno se přesvědčíme o identitě vztahů (3.16) a (3.22). Obdobně rozšířené matice druhého a třetího prvku budou

$$\mathbf{K}_2 = \frac{ES}{L_p} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{K}_3 = \frac{ES}{L_p} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \quad (3.23)$$

Celková energie napjatosti je pak součtem prvkových příspěvků

$$W = \sum_{i=1}^3 W_i = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \cdot (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3) \cdot \mathbf{U} = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} , \quad (3.24)$$

kde

$$\mathbf{K} = \frac{ES}{L_p} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} , \quad (3.25)$$

je celková (též výsledná, globální) matice tuhosti řešené oblasti, zatím bez realizace okrajových podmínek. Stejným způsobem získáme i celkovou matici zatížení \mathbf{F} , vyjádříme-li celkový potenciál vnějšího zatížení jako příspěvky od jednotlivých prvků:

$$P = \sum_{i=1}^3 P_i = \mathbf{U}^T \cdot (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3) = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{F} \quad , \quad (3.26)$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \rho g S L_p \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} . \quad (3.27)$$

3.2.5 Základní rovnice MKP

Pomocí (3.24) a (3.26) zapíšeme celkovou potenciální energii v závislosti na konečném počtu deformačních parametrů, uspořádaných v matici \mathbf{U} :

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{F} \quad . \quad (3.28)$$

Dle Lagrangeova variačního principu má Π nabývat stacionární hodnoty, což vede na podmínku

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{0} \quad . \quad (3.29)$$

Z parciálních derivací podle u_1, u_2, u_3, u_4 získáme soustavu čtyř lineárních algebraických rovnic

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad . \quad (3.30)$$

Snadno se lze přesvědčit, že matice soustavy \mathbf{K} je singulární (tj. determinant \mathbf{K} je nulový) a soustava nemá jednoznačné řešení. To je však v souladu se skutečností, že dosud nebyly předepsány okrajové podmínky a nejednoznačnost řešení odráží prostorovou neurčenost polohy tělesa jako celku. Pro deformační variantu MKP ve *statických* úlohách pružnosti platí tedy důležitá obecná zásada: *Řešitel musí vždy předepsat alespoň takové okrajové podmínky, aby zamezil pohybu tělesa jako celku ve všech jeho složkách, které jsou možné s ohledem na typ a dimenzi úlohy.*

Nesplnění této podmínky vede díky singularitě \mathbf{K} k numerickému zhroucení výpočtu (dělení nulou) při řešení soustavy rovnic (3.30). Více okrajových podmínek než je uvedené minimum samozřejmě předepsat lze.

Vazba prutu v naší úloze dle obr.3.3 odpovídá okrajové podmínce $u_1 = 0$. Deformační parametr u_1 musí být tedy jako známá veličina vypuštěn z matice neznámých parametrů \mathbf{U} spolu s vypuštěním první rovnice ze soustavy (3.30). To se na matici soustavy projeví vypuštěním 1. řádku a sloupce, na matici zatížení též vypuštěním 1. řádku. Získáme tak *základní rovnici MKP*

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad , \quad (3.31)$$

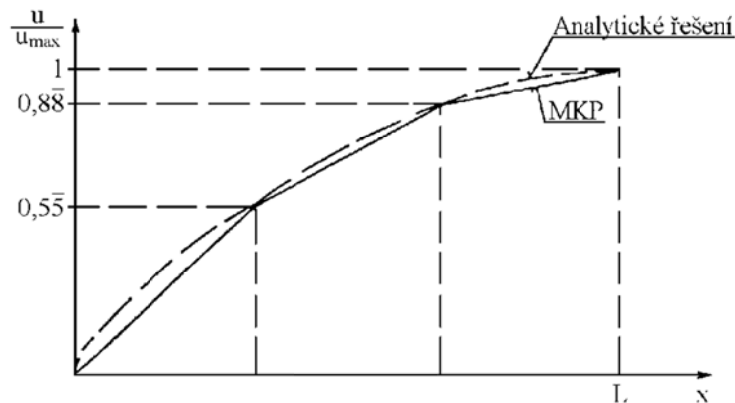
jejíž matice soustavy je nesingulární. Explicitní tvary jednotlivých matic jsou

$$\mathbf{K} = \frac{ES}{L_p} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \frac{1}{2} \rho g S L_p \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Z hlediska mechaniky představují řádky soustavy (3.31) rovnice rovnováhy v jednotlivých uzových bodech sítě. Minimalizací funkcionálu Π , při níž jsme kromě spojitosti posuvů apriorně předpokládali splnění geometrických a konstitutivních vztahů (rovnice (3.12) a (3.15)), dospíváme tedy nakonec k rovnicím rovnováhy. Čtenář si snadno může ověřit, že ke stejné soustavě lze dojít tzv. fyzikální diskretizací, a to když v obr.3.3 nahradíme jednotlivé

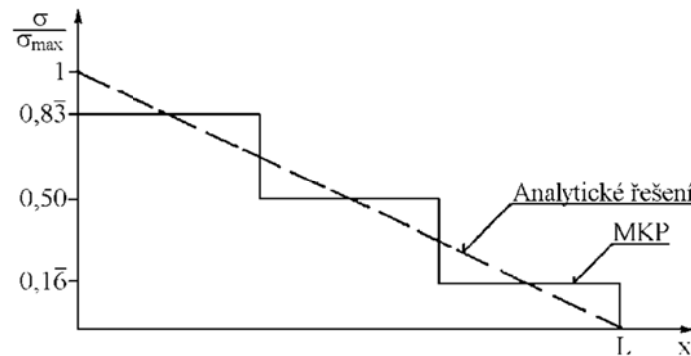
prvky pružinami s tuhostí ES/L_p , do uzlů soustředíme hmotnost odpovídajících částí sousedních prvků ρSL_p a napíšeme podmínky rovnováhy jednotlivých uvolněných uzlů.

Řešením (3.31) získáme posuvy všech uzlových bodů jako primární neznámou veličinu. Návratem na prvkovou úroveň lze pak v libovolném bodě řešené oblasti vyjádřit posuvy dle (3.6), přetvoření z (3.12) i napětí z (3.15). Výsledný průběh posuvů ilustrativní úlohy, vztažený k max. posuvu $u_{\max} = \frac{\rho g L^2}{2E}$ a porovnaný s analytickým řešením, je uveden na obr.3.6.



Obr.3.6 Srovnání numerického a analytického řešení prutu - posuv

V uzlových bodech se numerické výsledky shodují s analytickými, to však neplatí obecně - je to důsledek triviality ilustrativního příkladu. Obr.3.7 srovnává průběh analytického a numerického řešení napětí, které je v souladu se vztahem (3.15) po prvcích konstantní.



Obr.3.7 Srovnání numerického a analytického řešení prutu - napětí

4 Prutové prvky

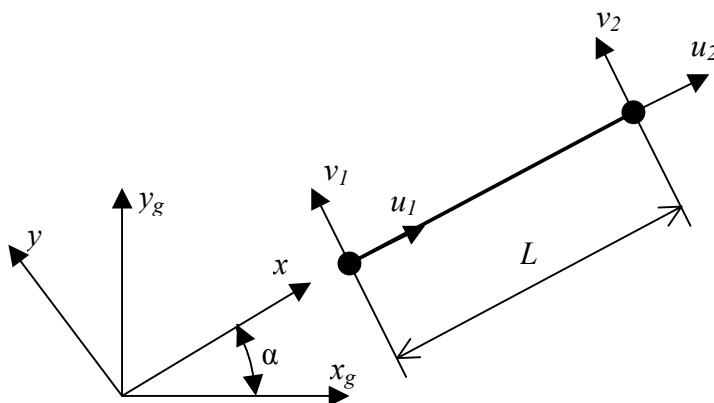
Všechny prutové prvky v této kapitole jsou formulovány jen v rámci předpokladů lineární pružnosti a je proto třeba zvláště pečlivě hodnotit splnění těchto předpokladů při hodnocení výsledků konkrétních řešených úloh. Zejména pruty namáhané tlakovou osovou silou se mohou snadno dostat mimo platnost lineární teorie (ztráta stability, vybočení prutu). Lineární výpočet v takovém případě poskytuje bez varování zcela zavádějící výsledky a je pouze na řešiteli, aby neadekvátnost lineárního modelu včas rozpoznal a použil některou z metod nelineární analýzy. Totéž lze doporučit i v případě jakýchkoli pochybností, protože úrovně nadřazený nelineární model poskytne korektní (i když zbytečně komplikované) řešení i pro lineární problém, obráceně to samozřejmě neplatí.

4.1 Prut přenášející pouze osové zatížení

Nejjednodušší prvek dle odst.3.2 umožňuje řešit pouze geometricky jednorozměrné problémy a jeho praktické využití je tedy velmi omezené. Nicméně odvozené matice lze snadno rozšířit i na případy, kdy osově namáhaný prvek má obecnou polohu v rovině, případně v prostoru.

4.1.1 Osově zatížený prut ve 2D

Uvažujme prutový prvek dle obr.4.1, jehož lokální souřadný systém s osou x ve střednici prutu je pootočen o úhel α vůči globálnímu souřadnému systému x_g, y_g .



Obr.4.1 Transformace prvkových matic při pootočení souřadného systému

Oproti obr.3.4 byl nyní rozšířen počet deformačních parametrů o posuvy v_1, v_2 , aby byl umožněn obecný posuv uzlových bodů v rovině xy . Vertikálním posuvům však není přiřazena žádná tuhost (prvek má nenulovou tuhost pouze ve směru x), matice tuhosti v lokálním souřadném systému je proto oproti (3.17) jen formálně rozšířena o nulové řádky a sloupce:

$$\mathbf{k} = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Deformační parametry vyjádřené v globálním a lokálním souřadném systému se při jejich vzájemném pootáčení transformují podle známých vztahů

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\delta}_g \quad (4.2)$$

kde

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\delta}_g = \begin{bmatrix} u_{1g} \\ v_{1g} \\ u_{2g} \\ v_{2g} \end{bmatrix} \quad a \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Explicitní tvar transformační matice

$$\lambda = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha x_g) & \cos(\alpha y_g) \\ \cos(\alpha y_g) & \cos(\alpha x_g) \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

kde $\cos(\alpha x_g)$ je cosinus úhlu sevřeného příslušnými osami. Protože transformační matice \mathbf{T} je ortogonální, platí $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$ a pro prvkové matice zatížení platí vztahy obdobné (4.2):

$$\mathbf{f} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{f}_g, \quad \text{resp.} \quad \mathbf{f}_g = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{f} \quad (4.6)$$

Prvkovou matici tuhosti tuhosti v globálním souřadném systému \mathbf{k}_g pak můžeme pomocí základní rovnice MKP na prvkové úrovni $\mathbf{k}_g \cdot \boldsymbol{\delta}_g = \mathbf{f}_g$ vyjádřit s využitím předchozích vztahů takto:

$$\mathbf{k}_g \cdot \boldsymbol{\delta}_g = \mathbf{f}_g = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{f} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\delta} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\delta}_g \quad (4.7)$$

Srovnáním prvního a posledního výrazu v rovnici (4.7) vidíme vztah mezi maticí tuhosti v globálních a lokálních souřadnicích

$$\mathbf{k}_g = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{T} \quad (4.8)$$

Transformace matice tuhosti má vždy tuto podobu, bez ohledu na typ prvku. Při použití nejjednoduššího prutového prvku ve 2D s prvkovou maticí dle (4.1) je nutno postupně všechny prvkové matice tuhosti a zatížení transformovat do téhož globálního souřadného systému a teprve poté je možno sestavit celkovou matici tuhosti dle odst.3.2.4.

Takto formulovaný prvek je použitelný k řešení příhradových konstrukcí v rovině, případně k modelování silového přenosu prostřednictvím lan či pružin. V systému ANSYS nese tento typ označení LINK1, k jeho zadání jsou kromě poloh koncových bodů nutné dále hodnoty plochy příčného průřezu S a modulu pružnosti E . Příklad jednoduché úlohy, řešené za pomoci uvedeného prvku, viz [příklad 4.1.1.](#)

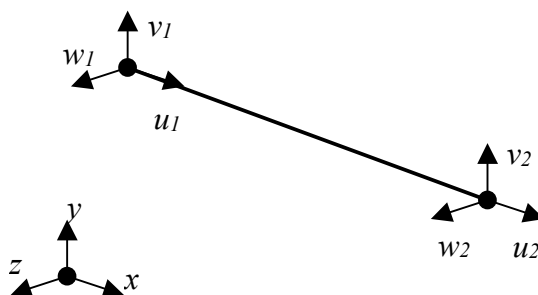
4.1.2 Osově zatížený prut ve 3D

Prostorová varianta předchozího prvku dle obr.4.2 se liší pouze explicitním tvarem jednotlivých matic. Prvek má šest deformačních parametrů $\delta = [u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2]^T$ a matice tuhosti v lokálním souřadném systému má tvar

$$\mathbf{k} = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

do globálního systému ji můžeme transformovat pomocí (4.8), kde transformační matice

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda \end{bmatrix}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} \cos(xx_g) & \cos(xy_g) & \cos(xz_g) \\ \cos(yx_g) & \cos(yy_g) & \cos(yz_g) \\ \cos(zx_g) & \cos(zy_g) & \cos(zz_g) \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

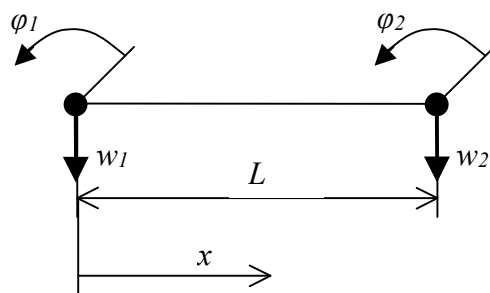


Obr.4.2 Osově namáhaný prut v prostoru

Prostorový prut přenášející osově namáhání má v systému ANSYS označení LINK8, jeho charakteristiky jsou shodné s prvkem LINK1. [Příklad 4.1.2](#) dokumentuje použití uvedeného typu prvku.

4.2 Nosníkový prvek

Nejjednodušší nosníkový prvek, přenášející pouze ohyb a posouvající sílu, musí z důvodů konvergence splňovat na mezivprvkových hranicích spojitost průhybů i natočení střednice. V každém z uzlových bodů jsou tedy dva deformační parametry, zajišťující tuto spojitost mezi sousedními prvky: průhyb w a natočení φ , viz obr.4.3.



Obr. 4.3 Nosníkový prvek

Nezávislou hledanou funkcí posuvů je v tomto případě průhyb $w(x)$, aproximovaný obdobně jako v předchozím případě

$$w(x) = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\delta} \quad (4.11)$$

kde matice deformačních parametrů $\boldsymbol{\delta}$ i matice bázevých funkcí \mathbf{N} mají čtyři prvky

$$\boldsymbol{\delta}^T = [w_1, \varphi_1, w_2, \varphi_2], \quad \mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \quad (4.12)$$

Jednotlivé bázevé funkce jsou polynomy 3. stupně, jejichž explicitní tvar včetně detailního odvození je běžně uváděn v literatuře [6]:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - 3x^2/L^2 + 2x^3/L^3 \\ N_2 &= x - 2x^2/L + x^3/L^2 \\ N_3 &= 3x^2/L^2 - 2x^3/L^3 \\ N_4 &= -x^2/L + x^3/L^2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Energii napjatosti ohýbaného nosníku můžeme vyjádřit vztahem

$$W = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} EI w_{,xx}^2 dx, \quad (4.14)$$

kde $w_{,xx} = \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\delta}$ je křivost nosníku, jejíž matice bázevých funkcí je získána jako druhá derivace bázevých funkcí průhybů (4.13). Dosazením křivosti do (4.14) dostaneme po úpravě explicitní tvar matice tuhosti nosníkového prvku

$$\mathbf{k} = \frac{EI}{L^3} \begin{vmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{Sym.} & & & 4L^2 \end{vmatrix}, \quad (4.15)$$

kde I je kvadratický moment průřezu nosníku, E modul pružnosti a L délka prvku.

Takto formulovaný prvek by sám o sobě umožňoval pouze řešení průhybu přímých nosníků a v komerčních systémech se proto vyskytuje v nejjednodušší podobě zpravidla v kombinaci s prvkem dle odst. 4.1.1 jako prvek pro řešení rovinných rámců.

4.3 Nosník s vlivem smyky

U štíhlých prutů, splňujících dostatečně přesně předpoklad rovinnosti příčných řezů, je natočení příčného řezu dáno první derivací průhybové čáry $\varphi = w_{,x}$. Jak je známo, pro tlusté

pruty dochází vlivem smykového napětí od posouvajících sil k deplanaci příčného průřezu a jeho celkové efektivní natočení je třeba vyjádřit jako [6]

$$\varphi = w_{,x} + \gamma, \quad (4.16)$$

kde γ je efektivní natočení průřezu od posouvajících sil. Tento příspěvek je nutno zahrnout do celkové energie napjatosti, která je oproti (4.14) rozšířena

$$W = \frac{1}{2} \int_L EI \varphi_{,x}^2 dx + \frac{1}{2} \int_L \frac{GS}{\beta} \gamma^2 dx, \quad (4.17)$$

β je parametr, zahrnující vliv tvaru průřezu.

Nosníkový prvek s vlivem smyku musí opět zachovávat spojitost průhybů i natočení v koncových bodech prostřednictvím čtyř deformačních parametrů (obr.4.3). Na rozdíl od předchozího případu jsou nyní nezávisle aproximovány posuvy a natočení příčného řezu

$$\begin{aligned} w(x) &= N_1 w_1 + N_2 w_2, \\ \varphi(x) &= N_1 \varphi_1 + N_2 \varphi_2, \end{aligned} \quad (4.18)$$

kde N_1, N_2 jsou lineární báze funkce dle (3.7). Vyjádřením γ ze vztahu (4.16), dosazením do výrazu pro energii napjatosti a následnými úpravami dostaneme matici tuhosti, ve které je možno oddělit samostatné příspěvky

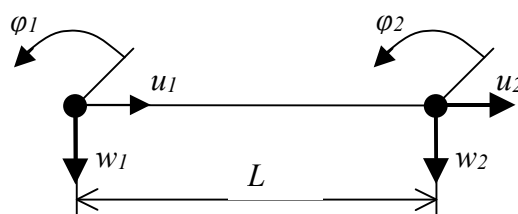
$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_m + \mathbf{k}_s, \quad (4.19)$$

kde \mathbf{k}_m je matice tuhosti v ohybu, \mathbf{k}_s matice tuhosti ve smyku.

Z uživatelského hlediska vyžaduje zavedení vlivu smyku rozšířit vstupní parametry, uvedené v předchozích odstavcích, pouze o vliv tvaru průřezu β a smykový modul pružnosti G .

4.4 Rámový prvek v rovině

Kombinací nosníkového prvku dle odst.4.2 a prutového prvku dle odst.4.1.1 získáme prvek se třemi deformačními parametry v uzlu (obr.4.4)



Obr.4.4 Rámový prvek v rovině

$$\delta^T = \left[u_1, w_1, \varphi_1, u_2, w_2, \varphi_2 \right]. \quad (4.20)$$

Za předpokladu lineárního chování, kdy nedojde k ovlivnění ohybové tuhosti osovými silami, platí princip superpozice. Ohybová a tahová složka napjatosti jsou navzájem nezávislé a matici tuhosti rámového prvku můžeme sestavit jednoduše sloučením příslušných matic tuhosti dle odst.4.1.1 a 4.2

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} T & 0 & 0 & -T & 0 & 0 \\ 0 & D & C & 0 & -D & C \\ 0 & C & A & 0 & -C & B \\ -T & 0 & 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & -D & -C & 0 & D & -C \\ 0 & C & B & 0 & -C & A \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

kde $T = ES/L$, $A = 4EI/L$, $B = 2EI/L$, $C = 6EI/L^2$, $D = 12EI/L^3$.

Jak lze snadno ověřit, energie napjatosti, vyjádřená kvadratickou formou jako $\delta^T \cdot \mathbf{k} \cdot \delta / 2$ bude v takovém případě součtem dvou navzájem nezávislých příspěvků od osově a ohybové složky napjatosti. Prvek v uvedeném nejjednodušším tvaru umožňuje lineární řešení rovinných prutových konstrukcí, jejichž jednotlivé členy přenášejí osově síly i ohybové momenty. Při jeho použití je třeba dbát na to, aby předpoklady linearit byly u řešené konstrukce skutečně splněny, jak je uvedeno v úvodu kapitoly 4.

Vliv posouvajících sil na deformaci je možno i do rámového prvku zahrnout stejným způsobem, jaký byl uveden v odst. 4.3. V systému ANSYS má tento prvek označení BEAM3. Základní charakteristiky prvku z uživatelského hlediska jsou následující:

Vstupní údaje:

- modul pružnosti E , případně i G (při zahrnutí posouvajících sil),
- plocha příčného průřezu S , případně i parametr vlivu tvaru průřezu β (při zahrnutí posouvajících sil),
- poloha uzlových bodů, určujících délku prvku L a jeho polohu v globálním souřadném systému,
- kvadratický moment průřezu k neutrální ose I ,
- vzdálenosti krajních vláken od neutrální osy průřezu.

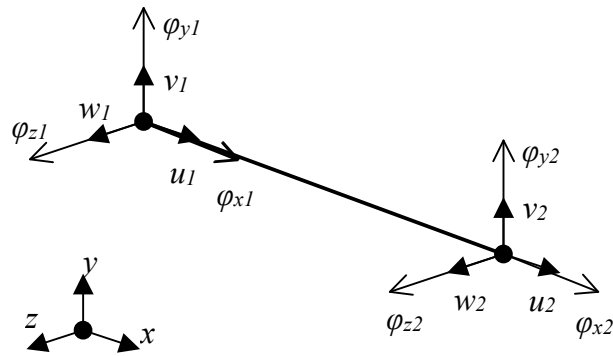
Výstupní údaje:

- posuvy a natočení uzlových bodů,
- uzlové síly a momenty,
- napětí a přetvoření od ohybové i osově složky zatížení.

4.5 Prut v prostoru

Přímý prut v prostoru, orientovaný v souřadném systému dle obr.4.5 tak, že osy y, z jsou hlavními centrálními osami průřezu, má šest deformačních parametrů v uzlu. Matice deformačních parametrů prvku má celkem dvanáct prvků:

$$\delta = [u_1, v_1, w_1, \varphi_{x1}, \varphi_{y1}, \varphi_{z1}, u_2, v_2, w_2, \varphi_{x2}, \varphi_{y2}, \varphi_{z2}]^T. \quad (4.22)$$



Obr.4.5 Prostorový prutový prvek

Z nich jsou parametry u_1, u_2 spojeny s osovým namáháním prutu a přísluší jim matice tuhosti dle (3.17). Parametry $v_1, \varphi_{z1}, v_2, \varphi_{z2}$ jsou svázány s ohybem kolem osy z , parametry $w_1, \varphi_{y1}, w_2, \varphi_{y2}$ jsou svázány s ohybem kolem osy y , jejich matice tuhosti je sestavena podle (4.15) s příslušným kvadratickým momentem průřezu I_z , resp. I_y .

Zbývající parametry, $\varphi_{x1}, \varphi_{x2}$, odpovídají krutovému namáhání prutu a na základě analogie s tahem jim můžeme přiřadit matici tuhosti

$$\mathbf{k} = \frac{GI_p}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

kde G je modul pružnosti ve smyku, I_p polární moment průřezu.

Celkovou matici tuhosti složíme za předpokladu platnosti principu superpozice z dílčích matic pro ohyb, tah a krut stejně jako matici rámového prvku v odst. 4.4. Její dimenze je 12x12. Obecný prutový prvek v prostoru je schopen správně modelovat kombinaci namáhání krut, ohyb i tah-tlak za předpokladu, že odezva na vnější zatížení je lineární. Pro krátké pruty je opět možno zahrnout i vliv posouvajících sil na deformaci střednice. V systému ANSYS má tento prvek označení BEAM4. Základní charakteristiky prvku z uživatelského hlediska jsou následující:

Vstupní údaje:

- moduly pružnosti E, G
- plocha příčného průřezu S , příp.i parametr vlivu tvaru průřezu β
- poloha uzlových bodů, určujících délku prvku L a jeho polohu,
- kvadratické momenty průřezu I_y, I_z, I_p ,
- vzdálenosti krajních vláken od neutrálních os y, z .

Výstupní údaje:

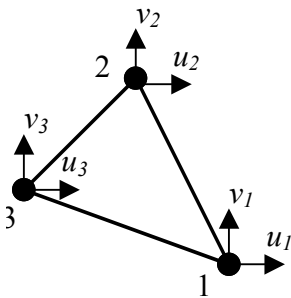
- posuvy a natočení uzlových bodů,
- uzlové síly a momenty,
- napětí a přetvoření od ohybové, krutové i osově složky zatížení.

5 Tělesové prvky v rovině a prostoru

Jako tělesové (též masivní, anglicky „solid“ prvky) budeme označovat prvky, umožňující diskretizaci spojitého prostředí, ať již v úlohách rovinných nebo prostorových. Nejjednodušším reprezentantem této kategorie ve 2D prostoru je trojúhelníkový prvek s lineárními bázovými funkcemi (obr. 5.1) a jeho 3D varianta, čtyřuzlový čtyřstěn. Další typy prvků budou ukázány v širších souvislostech jako členové „rodiny“ izoparametrických prvků.

5.1 Lineární trojúhelník

Rovinný trojúhelníkový prvek dle obr. 5.1 (též stěnový, membránový) má tři uzly ve vrcholech se šesti deformačními parametry.



Obr.5.1 Lineární trojúhelník

Automatické generátory sítě v preprocessorech konečnoprvkových systémů umožňují pomocí trojúhelníkových prvků spojitě pokrýt jakoukoli tvarově nepravidelnou rovinnou oblast. Hranice oblasti je po částech aproximována přímými úseky. Obě nezávislé složky posuvů v rovině, u a v , jsou nad prvkem aproximovány stejným typem polynomu. Ukažme proto detailně pouze aproximaci složky u . Základní tvar aproximační funkce

$$u(x,y) = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y = \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{a} , \quad (5.1)$$

kde matice $\mathbf{G} = [1, x, y]^T$ udává tvar polynomu,
matice $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]^T$ neznámé koeficienty.

Jestliže zapíšeme vodorovné složky posuvů ve vrcholech prvku do matice deformačních parametrů δ_u ,

$$\delta_u = [u_1, u_2, u_3]^T ,$$

můžeme je vyjádřit pomocí známých souřadnic vrcholů prvku, které jsou navzájem různé a neleží na jedné přímce, jako

$$\delta_u = \mathbf{S} \cdot \mathbf{a} . \quad (5.2)$$

\mathbf{S} je matice, sestavená ze souřadnic vrcholů prvku

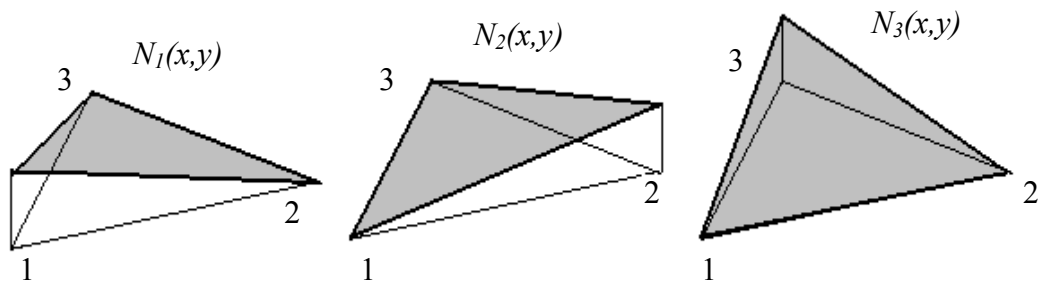
$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}.$$

Vyjádřením \mathbf{a} z (5.2) a dosazením do (5.1) dosáhneme obvyklého vyjádření aproximované funkce u v závislosti na deformačních parametrech ve vrcholech prvku

$$u(x,y) = \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \delta_{\mathbf{u}} = \mathbf{N}_{\mathbf{u}} \cdot \delta_{\mathbf{u}} \quad , \quad (5.3)$$

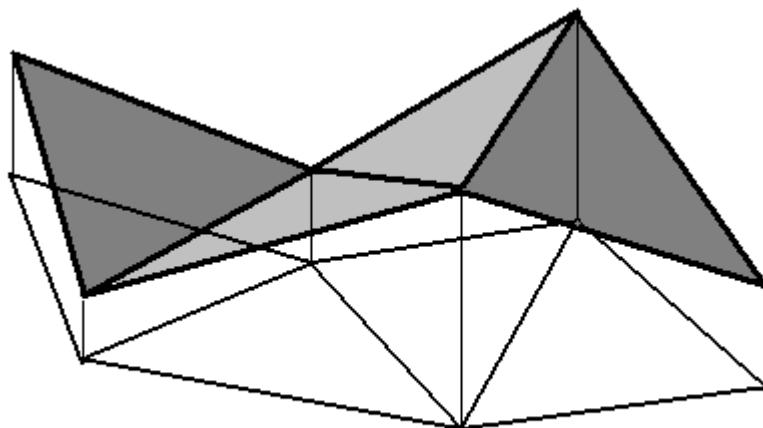
$$\mathbf{N}_{\mathbf{u}} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \quad .$$

Každá bázevá funkce N_i je lineární funkce nad trojúhelníkem, která má jednotkovou hodnotu v i -tém vrcholu a nulové hodnoty ve zbývajících dvou vrcholech, jak je uvedeno na obr. 5.2. Explicitní tvary bázevých funkcí trojúhelníka lze nalézt v [3], [4], [6].



Obr.5.2 Bázevé funkce trojúhelníkového prvku

Vzhledem k tomu, že sousední prvky sdílejí na společné hranici kromě krajních uzlů i odpovídající deformační parametry, je při použití aproximace (5.3) pole posuvů spojitě ve funkčních hodnotách a po částech lineární, jak je zřejmé z obr.5.3 (Funkce posuvů je na obrázku kvůli názornosti sklopena kolmo na rovinu xy).



Obr.5.3 Spojitá, po částech lineární aproximace posuvů nad trojúhelníkovými prvky

Jak bylo již uvedeno, aproximace druhé složky posuvů v je zpravidla stejného typu jako složky u , což lze maticově zapsat jako

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\delta} , \quad (5.4)$$

kde

$$\boldsymbol{\delta} = [u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3]^T ,$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} .$$

K sestavení matice tuhosti musíme nejprve vyjádřit napětí a přetvoření prostřednictvím nezávislé funkce posuvů. S využitím geometrických rovnic a konstitutivních vztahů, aplikovaných na rovinnou úlohu, získáme složky přetvoření

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\delta} = \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\delta} , \quad (5.5)$$

kde $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]^T$ je matice složek přetvoření,

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \text{ matice diferenciálních operátorů vztahů (2.2) a}$$

$\mathbf{B} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{N}$ matice tvarových funkcí přetvoření, získaná z báze funkcí N_i parciálními derivacemi. Složky napětí v rovině $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]$ získáme za předpokladu platnosti Hookova zákona

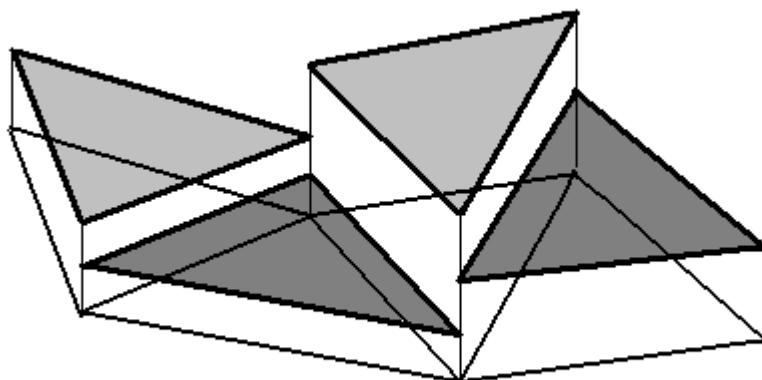
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\delta} . \quad (5.6)$$

Matice materiálových konstant \mathbf{D} může nabývat různých tvarů [13] podle toho, zda řešíme úlohu rovinné napjatosti, rovinné deformace nebo úlohu rotačně symetrickou. Vzhledem k derivacím lineárních báze funkcí ve vztahu (5.5) jsou průběhy složek přetvoření, ale i napětí **po prvcích konstantní, s nespojitostmi na hranicích mezi prvky**, jak je patrné na obr.5.4 (viz též [příklad 5.1.1](#)). Tato skutečnost vede zpravidla v místech s vysokými gradienty napětí k odřezání špičkových hodnot, důležitých z hlediska posuzování pevnosti a životnosti konstrukcí. Méně zkušený uživatel to může snadno přehlédnout, protože postprocesorem graficky zpracované výsledky jsou obvykle předkládány ve druhotně vyhlazené podobě, která nespojitosti v napětích stírá. Proto je nutné v oblastech očekávaných koncentrací napětí výrazně zjemnit síť prvků.

Dosazením $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ do výrazu pro energii napjatosti vyjádříme matici tuhosti trojúhelníkového prvku

$$\mathbf{k} = \iint_S \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t \, dx dy = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t S , \quad (5.7)$$

kde t je tloušťka prvku, S plocha prvku.



Obr.5.4 Nespojité průběh složek napětí a přetvoření nad trojúhelníkovými prvky

Lineární trojúhelník je stále velmi používaným prvkem zejména pro svoji jednoduchost, vzhledem ke konstantním průběhům napětí a přetvoření však není příliš přesný ve srovnání s jinými rovinnými prvky stejné velikosti. Pro dosažení srovnatelných výsledků pomocí trojúhelníků je nutné použít větší hustotu sítě. Menší přesnost se zejména projevuje v oblastech s významnou ohybovou napjatostí, jak ukazuje [příklad 5.1](#), [příklad 5.3](#) nebo s velkými gradienty napětí – viz [příklad 5.1.1](#).

V systému ANSYS je lineární trojúhelník chápán jako tvarově degenerovaná podoba čtyřúhelníkového prvku PLANE42, resp. PLANE182 (viz odst. 5.3.1.2). Tímto způsobem jsou uživatelé ANSYSU vybízeni k přednostnímu využívání vhodnějších prvků.

Jako všechny rovinné prvky, je možno i lineární trojúhelník použít nejen pro geometricky rovinné úlohy (rovinná napjatost a deformace), ale i pro analýzu rotačně symetrických problémů. Rovinná oblast, která je diskretizována, je potom meridiánovým (osovým) řezem rotačně symetrického tělesa – podrobněji viz [příklad 12.2](#), kde je takto řešeno pole teplotní (viz [kap.12](#)) i napěťové. Osou rotační symetrie bývá zpravidla souřadnicová osa y , nemusí to však platit ve všech systémech MKP. Posuvy jednotlivých bodů leží v meridiánové rovině, tenzory napětí a přetvoření však mají i (významné) složky, ležící kolmo na tuto rovinu – obvodová napětí a přetvoření. Právě na tyto složky se často zapomíná při vyhodnocování výsledků, což může mít fatální důsledky pro hodnocení pevnosti rotačně symetrických těles, řešených MKP. Totéž ovšem platí i v případě rovinné deformace $\varepsilon_z = 0$ s nenulovou složkou napětí ve směru z . Rovněž správné zařazení rovinného případu (rovinná napjatost nebo deformace?) a odpovídající volba při tvorbě výpočtového modelu MKP je zásadním krokem, na který se často zapomíná. Nevědomky se pak řeší jiná, v systému primárně nastavená varianta rovinné úlohy, dávající pochopitelně odlišné výsledky. Kupodivu i takové omyly zůstávají často neodhaleny, neboť není věnována dostatečná pozornost analýze získaných výsledků.

Proto doporučujeme: před prvním použitím rovinných prvků jakéhokoli typu prolistovat znovu základní literaturu o rovinných a rotačně symetrických úlohách v pružnosti. Nevěřit slepě počítačově získaným výsledkům a prověřit jejich spolehlivost elementárními vztahy pružnosti – stačí řádové odhady velikostí složek napětí a posuvů a zejména prověření nulových složek tenzorů napětí a přetvoření.

5.2 Prostorový čtyřstěn (tetraedr)

Nejjednodušší prostorový prvek – čtyřstěn dle obr.5.7 – můžeme považovat za přímočaré rozšíření rovinného lineárního trojúhelníka do třetího rozměru. Tři složky posuvů u , v , w jsou aproximovány lineární funkcí tří prostorových souřadnic, pro posuv u tedy platí

$$u(x,y,z) = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y + a_4 \cdot z = \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{a} , \quad (5.8)$$

kde $\mathbf{G} = [1, x, y, z]^T$ udává tvar polynomu,
 $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3, a_4]^T$ neznámé koeficienty.

Podobně jako u trojúhelníka zavedeme pro vodorovné složky posuvů matici deformačních parametrů $\delta_{\mathbf{u}}$,

$$\delta_{\mathbf{u}} = [u_1, u_2, u_3, u_4]^T .$$

Analogicky ke vztahům (5.2), (5.3) můžeme psát

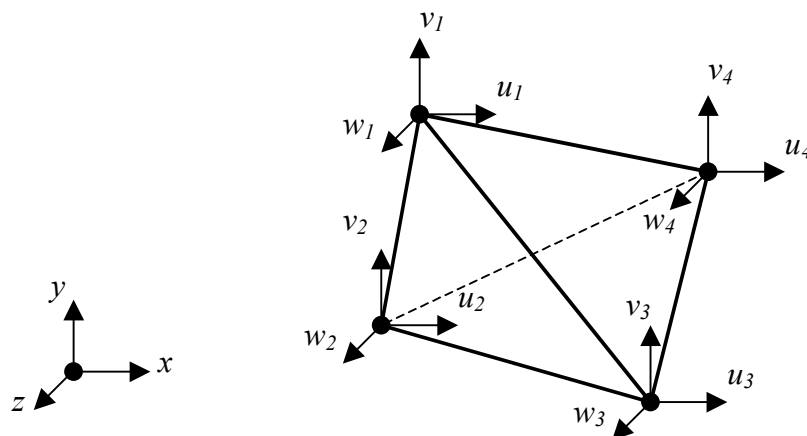
$$\delta_{\mathbf{u}} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{a} , \quad (5.9)$$

$$u(x,y,z) = \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \delta_{\mathbf{u}} = \mathbf{N}_{\mathbf{u}} \cdot \delta_{\mathbf{u}} , \quad (5.10)$$

kde matice \mathbf{S} , $\mathbf{N}_{\mathbf{u}}$ jsou oproti odst.5.1 rozšířeny

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{N}_{\mathbf{u}} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] .$$

Lineární báze funkce N_i mají stejné vlastnosti jako u trojúhelníka (jednotková hodnota u i -tého uzlu, nulová ve všech ostatních), jde tedy o prostorovou variantu obr.5.2.



Obr.5.7 Prostorový čtyřstěn

Jelikož jsou všechny tři složky posuvů aproximovány stejným typem polynomu, je posuv prvku plně určen dvanácti deformačními parametry

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\delta} , \quad (5.11)$$

kde

$$\boldsymbol{\delta} = [u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, u_3, v_3, w_3, u_4, v_4, w_4]^T ,$$

$$\mathbf{N} = [N_1 \cdot \mathbf{E}, N_2 \cdot \mathbf{E}, N_3 \cdot \mathbf{E}, N_4 \cdot \mathbf{E}] ,$$

\mathbf{E} je jednotková matice dimenze 3x3.

Podobně jako u trojúhelníka jsou odvozeny matice přetvoření a napětí

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\delta} = \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\delta} , \quad (5.12)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\delta} , \quad (5.13)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}]^T , \quad \boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}]^T .$$

Matice diferenciálních operátorů \mathbf{L} má tvar, odpovídající geometrickým vztahům (2.2) v obecném prostorovém případě

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} ,$$

Materiálová matice \mathbf{D} zobecněného Hookova zákona dle (2.3) a (2.4) je běžně uváděna v učebnicích a skriptech pružnosti [13]. Prvková matice tuhosti

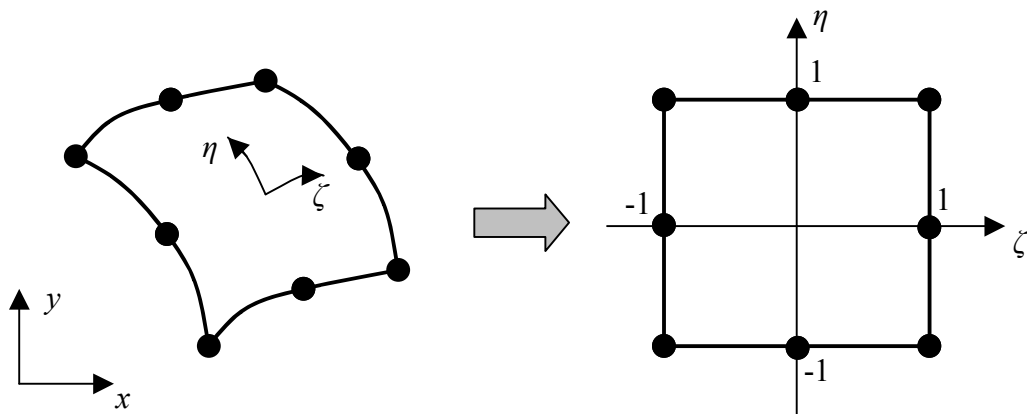
$$\mathbf{k} = \iiint \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} V , \quad (5.14)$$

kde V je objem prvku. Stejně jako u lineárního trojúhelníka platí, že průběhy složek napětí a přetvoření jsou po prvcích konstantní, s nespojitostmi na hranicích mezi prvky. Opět platí, že prvek není příliš přesný a k jeho používání jsou výhrady. V systému ANSYS lze tento prvek použít pouze jako speciální degenerovaný tvar šestistěnového prvku SOLID45, resp. SOLID185 (odst. 5.3.1.3). Přesto však existuje silný argument pro používání čtyřstěnu jako tvaru, vhodného ke generování komplikovaných prostorových sítí: žádný jiný tvar není totiž použitelný k plně automatickému vykrytí tvarově složitých objemů těles, modelovaných ve 3D. Sít' ze šestistěnu vyžaduje vždy komplikovanou topologickou přípravu a poskytuje jen omezené možnosti lokálního zhušťování. Rovněž kombinace objemových čtyřstěnových a šestistěnových prvků není tak snadno generovatelná jako kombinace troj- a čtyřúhelníků v rovinné síti, ale vyžaduje speciální přechodové oblasti. Proto jsou čtyřstěny jako základní

tvary prvků prostorových sítí stále využívány, doporučujeme však použít čtyřstěny s vyššími bázovými funkcemi, které budou uvedeny dále (odst. 5.3.2.3).

5.3 Izoparametrická formulace prvků

Dosud uvedené typy prvků byly jednoduché z hlediska geometrického tvaru i bázových funkcí, které byly, s výjimkou ohýbaných nosníků, lineární. Matice tuhosti i zatížení u takových prvků je možno integrovat analyticky. U komplikovanějších tvarů prvků se zakřivenými hranami a vyššími stupni aproximačních polynomů bázových funkcí je nutno využívat numerickou integraci prvkových matic. Přitom se s výhodou použije transformace geometrie z kartézského systému souřadnic x, y na tzv. jednotkový prvek v přirozeném souřadném systému křivočarých souřadnic ζ, η – pro rovinný osmiuzlový čtyřúhelník je to naznačeno na obr.5.8.



obr.5.8 Izoparametrický prvek v kartézském a přirozeném souřadném systému

Jedná se o stejný postup, jako když při integraci plochy kruhu přejdeme z kartézských do polárních souřadnic. Při této transformaci se podstatně zjednoduší integrační meze, je však nutno definovat transformační vztahy

$$x = x(\zeta, \eta), \quad y = y(\zeta, \eta), \quad (5.15)$$

mezi kartézskými a přirozenými souřadnicemi. Matici tuhosti rovinného osmiuzlového čtyřúhelníka pak získáme integrací výrazu

$$\mathbf{k} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t \det \mathbf{J} d\zeta d\eta, \quad (5.16)$$

kde Jakobián transformace

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}.$$

Bázové funkce pro popis posuvů jsou u takových prvků formulovány přímo v přirozeném souřadném systému, pro libovolnou složku posuvu pak platí v souladu s (5.3), (5.4)

$$u(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\zeta, \eta) \cdot u_i \quad v(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\zeta, \eta) \cdot v_i, \quad (5.17)$$

kde u_i, v_i jsou posuvy uzlových bodů.

Ukázalo se, že transformační vztahy (5.15) je vhodné formulovat analogickým způsobem:

$$x(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^8 \hat{N}_i(\zeta, \eta) \cdot x_i \quad y(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^8 \hat{N}_i(\zeta, \eta) \cdot y_i \quad , \quad (5.18)$$

kde x_i, y_i jsou souřadnice uzlových bodů. V případě, že platí

$$N_i = \hat{N}_i \quad , \quad (5.19)$$

je geometrie prvku popsána stejným polynomem jako pole posuvů, se stejným počtem parametrů, odtud název *izoparametrický* prvek. Vzhledem k dobrým numerickým vlastnostem i algoritmické kompaktnosti odpovídajících programových procedur jsou izoparametrické prvky základem všech komerčních systémů MKP. Přísně vzato jsou izoparametrickými i předchozí typy lineárních prvků (trojúhelník v rovině, čtyřstěn v prostoru), jelikož jejich geometrie je popsána stejným počtem parametrů jako posuvy. Obvykle se v této souvislosti ale označení „izoparametrický“ nepoužívá.

Kromě *izo-* existují též prvky *sub-* nebo *superparametrické*, u kterých je geometrie popsána méně nebo více parametry ve srovnání s posuvy.

Vzhledem k tomu, že báze funkce izoparametrických prvků jsou budovány systematicky na základě několika málo základních typů, je obvyklé je sdružovat do „rodin“, které v následujících odstavcích stručně popíšeme.

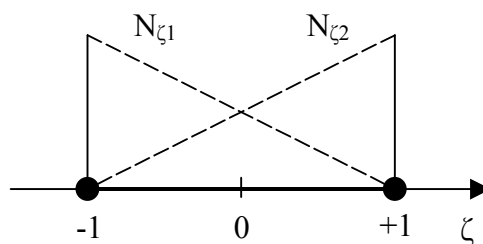
5.3.1 Izoparametrické prvky s lineárním základem báze funkce

5.3.1.1 Lineární prutový prvek

Základem všech následujících prvků odstavce 5.3.1 jsou lineární báze funkce prutového prvku dle odst.3.2, které jsou pouze transformovány na jednotkový prvek s nezávislou souřadnicí ζ – viz obr.5.9

$$N_{\zeta 1} = (1 - \zeta) / 2 \quad , \quad N_{\zeta 2} = (1 + \zeta) / 2 \quad (5.20)$$

Takto formulované báze funkce jsou použity pro popis geometrie i posuvů přímých prutových prvků dle odst.4.1, v systému ANSYS označených jako LINK1 a LINK8.



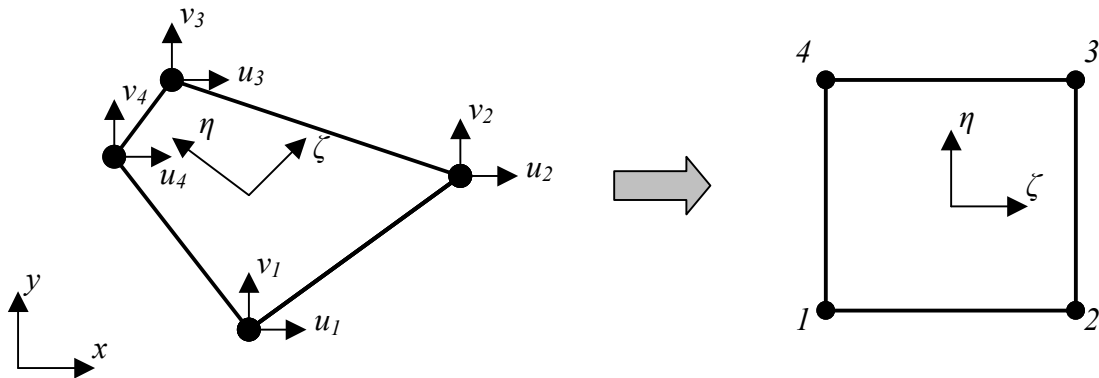
Obr.5.9 Lineární báze funkce na jednotkovém prutovém prvku

5.3.1.2 Bilineární čtyřúhelník

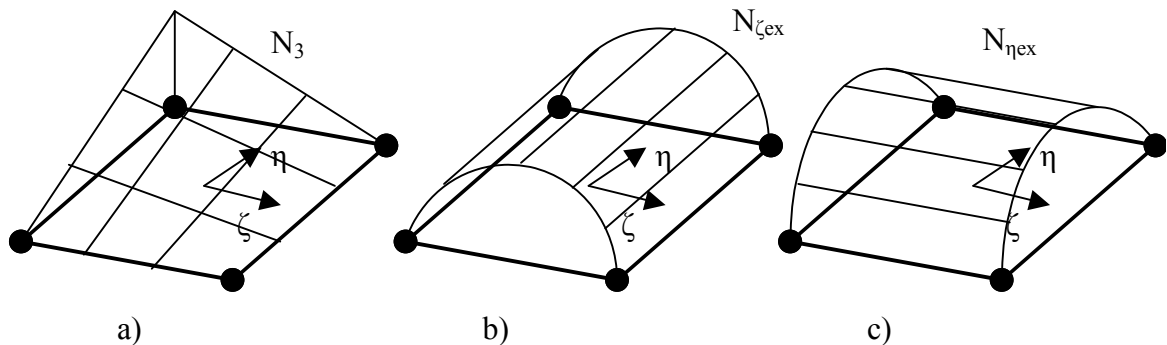
Rovinný čtyřúhelník s osmi deformačními parametry ve vrcholech umožňuje řešení roviných a rotačně symetrických problémů pružnosti, podobně jako lineární trojúhelník odst.5.1. Čtyři základní báze funkce, příslušející jednotlivým vrcholům, jsou odvozeny jako součin odpovídajících prutových báze funkcí v proměnných ζ a η . Jestliže zvolíme číslování vrcholů prvku dle obr.5.10, potom jednotlivé báze funkce budou popsány polynomy

$$\begin{aligned}
 N_1 &= N_{\zeta_1} \cdot N_{\eta_1} = (1 - \zeta) \cdot (1 - \eta) / 4 \\
 N_2 &= N_{\zeta_2} \cdot N_{\eta_1} = (1 + \zeta) \cdot (1 - \eta) / 4 \\
 N_3 &= N_{\zeta_2} \cdot N_{\eta_2} = (1 + \zeta) \cdot (1 + \eta) / 4 \\
 N_4 &= N_{\zeta_1} \cdot N_{\eta_2} = (1 - \zeta) \cdot (1 + \eta) / 4
 \end{aligned}
 \tag{5.21}$$

Je zřejmé, že se nejedná o lineární funkce jako u trojúhelníka, neboť výrazy obsahují kvadratický člen - součin $\zeta\eta$. Vzhledem ke způsobu vzniku (součin dvou lineárních polynomů) se pro ně vžilo označení *bilineární*. Grafické znázornění jedné z bilineárních bázových funkcí je na obr.5.11.a.



Obr.5.10 Bilineární čtyřúhelník v kartézském a přirozeném s.s.



Obr.5.11 Bázové funkce rovinného čtyřúhelníka:

- a) bilineární funkce N_3
- b) doplňková (nekompatibilní) funkce $N_{\zeta_{ex}}$
- c) doplňková (nekompatibilní) funkce $N_{\eta_{ex}}$

Bilineární bázové funkce $N_1 - N_4$ na čtyřúhelníku poskytují při stejné hustotě sítě lepší výsledky, než trojúhelník dle odst.5.1, přesto však je prvek v mnoha situacích příliš tuhý. Ve snaze zlepšit jeho vlastnosti jsou často základní bázové funkce rozšiřovány o další, doplňkové funkce (anglicky „extra shapes“). Na obr.5.11.b,c jsou uvedeny dvě doplňkové funkce

$$N_{\zeta_{ex}} = 1 - \zeta^2, \quad N_{\eta_{ex}} = 1 - \eta^2, \tag{5.22}$$

které patří ke standardnímu vybavení rovinného čtyřúhelníkového prvku PLANE42, resp. PLANE182 systému ANSYS. Na rozdíl od čtyřech základních nejsou doplňkové funkce

spojeny přímo s žádným uzlovým deformačním parametrem a dokonce porušují spojitost posuvů na hranici mezi prvky. Takové báze funkce a příslušné prvky se označují jako nekompatibilní a zmíníme se o nich později v souvislosti s konvergencí MKP. Jak je vidět v [Příkladu 5.2](#), [Příkladu 5.3](#), a [Příkladu 5.2.2](#) zlepšují doplňkové funkce velmi významně vlastnosti rovinného čtyřúhelníka vůči standardnímu čtyřúhelníku a zejména vůči trojúhelníku.

5.3.1.3 Osmiuzlový prostorový šestistěn (hexaedr) a odvozené lineární prvky

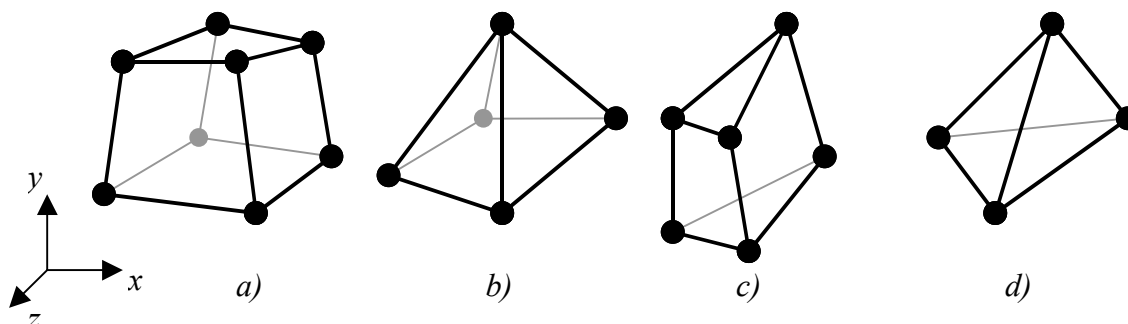
Osm základních báze funkcí prvku dle obr.5.13a je vytvořeno systematicky vzájemným násobením lineárních báze funkcí proměnných ζ , η a ξ , obdobně jako u rovinného čtyřúhelníka:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= N_{\zeta_1} \cdot N_{\eta_1} \cdot N_{\xi_1} = (1 - \zeta) \cdot (1 - \eta) \cdot (1 - \xi) / 8 \\
 N_2 &= N_{\zeta_2} \cdot N_{\eta_1} \cdot N_{\xi_1} = (1 + \zeta) \cdot (1 - \eta) \cdot (1 - \xi) / 8 \\
 N_3 &= N_{\zeta_2} \cdot N_{\eta_2} \cdot N_{\xi_1} = (1 + \zeta) \cdot (1 + \eta) \cdot (1 - \xi) / 8 \\
 N_4 &= N_{\zeta_1} \cdot N_{\eta_2} \cdot N_{\xi_1} = (1 - \zeta) \cdot (1 + \eta) \cdot (1 - \xi) / 8 \\
 N_5 &= N_{\zeta_1} \cdot N_{\eta_1} \cdot N_{\xi_2} = (1 - \zeta) \cdot (1 - \eta) \cdot (1 + \xi) / 8 \\
 N_6 &= N_{\zeta_2} \cdot N_{\eta_1} \cdot N_{\xi_2} = (1 + \zeta) \cdot (1 - \eta) \cdot (1 + \xi) / 8 \\
 N_7 &= N_{\zeta_2} \cdot N_{\eta_2} \cdot N_{\xi_2} = (1 + \zeta) \cdot (1 + \eta) \cdot (1 + \xi) / 8 \\
 N_8 &= N_{\zeta_1} \cdot N_{\eta_2} \cdot N_{\xi_2} = (1 - \zeta) \cdot (1 + \eta) \cdot (1 + \xi) / 8
 \end{aligned}
 \tag{5.23}$$

Podobně jako u rovinného čtyřúhelníka, i v případě šestistěnu bývají tyto základní báze funkce doplňovány třemi nekompatibilními funkcemi, které výrazně zlepšují vlastnosti prvku:

$$N_{\zeta_{ex}} = 1 - \zeta^2, \quad N_{\eta_{ex}} = 1 - \eta^2, \quad N_{\xi_{ex}} = 1 - \xi^2.
 \tag{5.24}$$

Kromě základního tvaru šestistěnu lze postupným vypouštěním vrcholů, hran a ploch obdržet řadu dalších odvozených tvarů, u nichž jsou odpovídajícím způsobem upraveny i základní báze funkce. Výběr nejužívanějších je na obr.5.13. Některé systémy je uvádějí v knihoně prvků jako samostatné položky, systém ANSYS je všechny pokládá za degenerované varianty základního tvaru – šestistěnu s označením SOLID45, resp. SOLID185. U těchto tvarů, pokud neuvažujeme doplňkové báze funkce (5.24), je vždy zaručena spojitost posuvů na styku mezi prvky, pokud tyto na sebe přiléhají odpovídajícími plochami – tj. trojúhelníkovou stěnou na trojúhelník, resp. čtyřúhelník na čtyřúhelník.



Obr.5.13 Osmiuzlový šestistěn a jeho tvarově degenerované podoby

Tvar *a*) obr.5.13 se používá k vytváření tzv. „mapovaných“ sítí (mapped meshing), kdy uživatel musí zpravidla předem sám rozhodnout, jak rozdělit řešenou oblast na suboblasti, které topologicky vyhovují pro rozdělení na „krychličky“, jež na sebe uvnitř suboblastí i na jejich hranicích budou správně navazovat – stěna na stěnu, hrana na hranu. To může být velmi obtížné, zvláště při požadavku na lokální zhuštění sítě. Odměnou za zvýšenou námahu při přípravě mapované sítě je podstatně menší počet vygenerovaných prvků a uzlů a tedy nižší výpočtové časy a paměťové požadavky, než při použití automatického generování čtyřstěnu.

Tvar *d*) je využíván při plně automatickém generování sítě (free meshing), kdy uživatel zadá jen základní požadavky na typickou velikost prvku, případně na oblasti zhuštění sítě, a vše ostatní přenechá preprocessoru. Pro uživatele je to zpravidla vždy jednodušší postup. Korektní přímé spojení sítě, vytvořené částečně ze šesti- a částečně ze čtyřstěnu, není možné. Pokud se to přesto jeví jako žádoucí, je možno využít přechodových oblastí, vytvořených z pětistěnu *b*) nebo *c*) na obr.5.13. To je hlavní praktické využití uvedených prvků, protože samostatné sítě, vytvářené jen z těchto typů, se prakticky nevyužívají. Pro vytvoření zmíněných přechodových oblastí nabízejí preprocessory komerčních systémů dnes speciální zjednodušené postupy a prostředky.

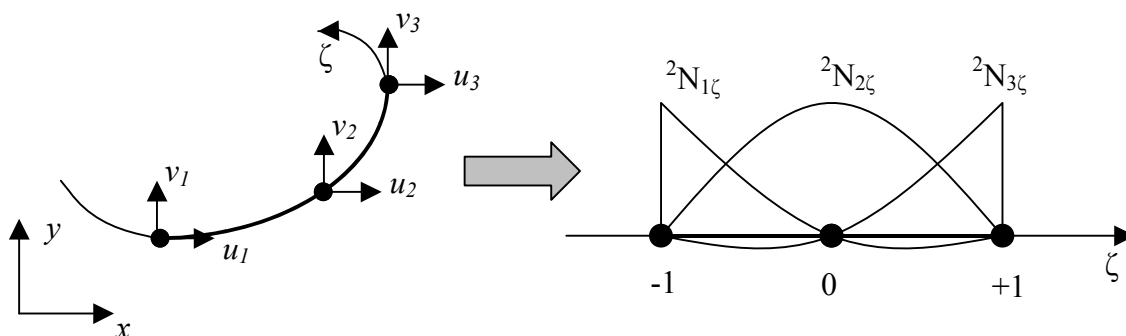
5.3.2 Izoparametrické prvky s kvadratickým základem bázové funkce

Charakteristickým rysem této skupiny prvků jsou uzly na hranách, nejen ve vrcholech. Geometrie i posuvy podél hrany jsou popsány kvadratickým polynomem, což umožňuje lépe aproximovat zakřivené hrany a povrchy diskretizovaných těles.

5.3.2.1 Kvadratický prutový prvek

Graficky je průběh bázových funkcí tříuzlového prutového prvku (5.25) uveden na obr.5.14. Stejně jako v lineárním případě, každá z funkcí přísluší jednomu uzlu, v němž nabývá jednotkové hodnoty, ve zbývajících dvou uzlech je nulová.

$$\begin{aligned} {}^2N_{\zeta 1} &= \zeta \cdot (\zeta - 1) / 2, \\ {}^2N_{\zeta 2} &= (1 + \zeta) \cdot (1 - \zeta), \\ {}^2N_{\zeta 3} &= \zeta \cdot (1 + \zeta) / 2. \end{aligned} \tag{5.25}$$

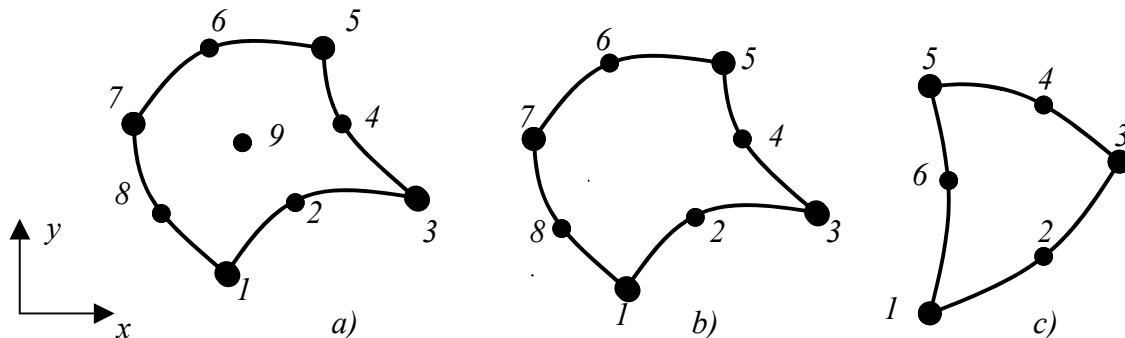


Obr.5.14 Kvadratický prutový prvek a jeho bázové funkce

5.3.2.2 Rovinné kvadratické prvky

Systematické rozvíjení rodiny kvadratických prvků, analogicky k lineárnímu případu, vede již v rovinném případě na prvky s vnitřními uzlovými body – viz devítíuzlový čtyřúhelník dle obr.5.15a. Jeho báze funkce lze získat součinem výrazů (5.25) ve dvou proměnných:

$$\begin{aligned} N_1 &= {}^2N_{\zeta_1} \cdot {}^2N_{\eta_1}, & N_2 &= {}^2N_{\zeta_2} \cdot {}^2N_{\eta_1}, & N_3 &= {}^2N_{\zeta_3} \cdot {}^2N_{\eta_1}, \\ N_4 &= {}^2N_{\zeta_3} \cdot {}^2N_{\eta_2}, & N_5 &= {}^2N_{\zeta_3} \cdot {}^2N_{\eta_3}, & N_6 &= {}^2N_{\zeta_2} \cdot {}^2N_{\eta_3}, \\ N_7 &= {}^2N_{\zeta_1} \cdot {}^2N_{\eta_3}, & N_8 &= {}^2N_{\zeta_1} \cdot {}^2N_{\eta_2}, & N_9 &= {}^2N_{\zeta_2} \cdot {}^2N_{\eta_2}, \end{aligned} \quad (5.26)$$



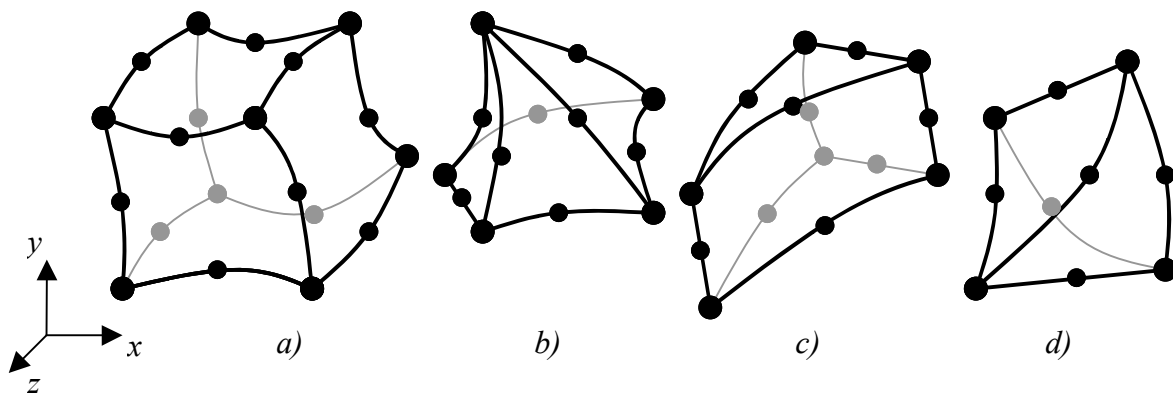
Obr.5.15 Rovinné prvky, postavené na kvadratických bázeových funkcích:

- a) devítíuzlový čtyřúhelník
- b) osmiuzlový čtyřúhelník
- c) šestiuzlový trojúhelník

Vnitřní uzlové body obvykle nepřinášejí z hlediska vlastností prvku velký užitek a jsou proto často vypuštěny, což vede na využívání velmi populárního osmiuzlového izoparametrického čtyřúhelníka dle obr.5.15b. Vypuštění devátého uzlu vyžaduje i obměnu bázeových funkcí (5.26), jejich konkrétní tvary jsou běžně uváděny v literatuře [4]-[8]. V systému ANSYS má osmiuzlový čtyřúhelník označení PLANE82, resp. PLANE183 s ním kompatibilní šestiuzlový trojúhelník dle obr.5.15c je opět považován za jeho degenerovanou podobu a nese tedy stejné označení. Na rozdíl od lineárních prvků nejsou základní bázeové funkce u kvadratických prvků již doplňovány žádnými přídatnými bázeovými funkcemi, jedná se tedy o navzájem plně kompatibilní prvky.

5.3.2.3 Prostorové kvadratické prvky

Při přechodu do prostoru dochází vždy k vypouštění vnitřních stěnových a tělesových uzlů, šestistěnová podoba kvadratického prvku má tedy 20 uzlových bodů – 8 ve vrcholech a 12 na hranách – viz obr.5.16a. Při třech deformačních parametrech v uzlu to představuje celkem 60 parametrů na jednom prvku, odpovídající dimenze matice tuhosti prvku je tedy 60x60 a prvek představuje ve srovnání s lineární variantou – při srovnatelné hustotě sítě – podstatně větší nároky na kapacitu hardwaru.



Obr.5.16 Dvacetiuzlový šestistěn a jeho tvarově degenerované podoby

V systému ANSYS má prvek označení SOLID95, resp. SOLID186, pod stejným označením jsou rovněž zahrnuty i degenerované tvary dle obr. 5.16b-d. Stejně jako u lineárních prvků, tvary šestistěnu jsou vytvářeny jako tzv. „mapovaná“ síť, zatímco čtyřstěny generuje plně automatický proces. Rovněž o vzájemné kompatibilitě jednotlivých tvarů na obr.5.16 a o přechodových oblastech sítě platí totéž, co v odst.5.3.1.3.

5.3.3 Numerická integrace prvkových matic

Na rozdíl od nejjednodušších typů prvků, jako je lineární trojúhelník nebo čtyřstěn, není možné u mnoha komplikovanějších izoparametrických prvků analyticky integrovat prvkové matice tuhosti (5.16), případně matice zatížení. Je nutno postupovat numericky, přičemž se prakticky výhradně používá Gaussovy integrace. Při nejjednodušší aproximaci integrálu na jednotkovém prvku dle obr.5.9 můžeme vyčíslit integrovanou funkci Φ uprostřed prvku a násobit tuto hodnotu délkou intervalu

$$\int_{-1}^1 \Phi(\zeta) d\zeta \cong 2 \cdot \Phi(\zeta = 0) \quad . \quad (5.27)$$

Tato aproximace bude přesnou hodnotou integrálu v případě, že integrovaná funkce je lineární. Zobecnění této myšlenky vede na formuli

$$\int_{-1}^1 \Phi(\zeta) d\zeta \cong \sum_{i=1}^n w_i \Phi(\zeta_i) \quad , \quad (5.28)$$

kde n je počet tzv. Gaussových integračních bodů, v nichž vyčíslujeme integrovanou funkci. Číslo n je rovněž označováno jako řád Gaussovy integrace. Poloha integračních bodů ζ_i je Gaussovou metodou stanovena tak, aby bylo dosaženo nejvyšší přesnosti integrace: při použití řádu integrace n je možno přesně integrovat polynomy do stupně $(2n - 1)$. Každému Gaussovu bodu přísluší jistá váha w_i . Souřadnice i váhy integračních bodů na jednotkovém prvku v intervalu $-1 \leq \zeta \leq +1$ jsou uvedeny v tab.5.4. Je vidět, že jsou symetricky rozmístěny vzhledem ke středu jednotkového prvku.

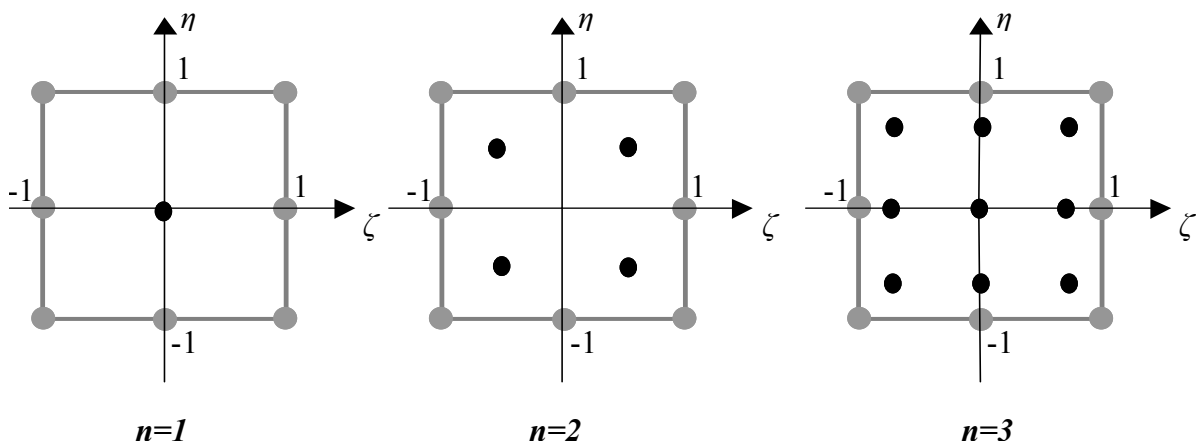
řád integrace n	souřadnice ζ_i	váha w_i
1	0,000	2,000
2	$\pm 0,577$	1,000
3	$\pm 0,774$	0,555
	0,000	0,889
4	$\pm 0,861$	0,348
	$\pm 0,340$	0,652

Tab.5.4 Souřadnice a váhy integračních bodů při Gaussově integraci

Aplikujme nyní Gaussovu integraci na vyčíslení matice tuhosti rovinného prvku dle vztahu (5.16) – funkci Φ tedy nahradíme součinem matic \mathbf{B} , \mathbf{D}

$$\mathbf{k} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t \det \mathbf{J} d\zeta d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \mathbf{B}^T(\zeta_i, \eta_j) \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}(\zeta_i, \eta_j) \det \mathbf{J} \quad (5.29)$$

V závislosti na zvoleném řádu integrace bude nutno všechny matice vyčíslovat v jednom, ve čtyřech nebo v devíti integračních bodech, jejichž umístění je naznačeno na obr. 5.17. Předpokládáme přitom, že v obou směrech souřadnicových os je použito stejného řádu integrace, což je obvyklá praxe.



Obr.5.17 Umístění Gaussových bodů na jednotkovém rovinném prvku

Z uvedeného je patrné, že při zvyšování řádu integrace se zpřesňuje aproximace integrovaných výrazů, zároveň však narůstá množství operací při sestavení prvkových matic tuhosti a zatížení, neboť všechny prvkové matice jsou vyčíslovány v mnohem větším počtu bodů. Zvláště pro prostorové prvky je tento nárůst velmi citelný – viz tab.5.5. Konkrétní volba řádu integrace je tedy kompromisem mezi požadavkem přesnosti a rychlosti výpočtu. Ve standardních aplikacích je zpravidla v komerčních systémech pro uživatele ke každému typu prvku nastaven optimální integrační řád, řada systémů však umožňuje jeho modifikaci, zvláště při řešení netypických problémů. Na závěr připomeňme, že příliš nízký řád integrace může vést až k singulární matici tuhosti celého modelu, a tedy ke zhroucení výpočtu. Někdy se naopak nízkého řádu integrace – takzvané *redukované integrace* – využívá záměrně

k selektivní integraci jen některých složek tenzoru napětí/přetvoření. To je však speciální problematika, přesahující náplň a cíle tohoto textu.

řád integrace n	počet integračních bodů podle dimenze prvku		
	1D	2D	3D
1	1	1	1
2	2	4	8
3	3	9	27
4	4	16	64

Tab.5.5 Počet integračních bodů při vyčíslení prvkových matic v závislosti na dimenzi úlohy a řádu integrace

5.3.4 Tvar prvku a jeho přesnost

Izoparametrická formulace umožňuje využívat různě deformované tvary základních typů prvků, jak je uvedeno na obr.5.13 – 5.16. Je však nutno počítat s tím, že u příliš deformovaného tvaru dostáváme špatně podmíněné prvkové matice, což může vést k lokálním chybám zejména ve složkách napětí. Ideálním tvarem je z tohoto hlediska v prostoru krychle, v rovině pak čtverec, případně rovnostranný trojúhelník.

Při automatickém generování volných sítí je přiblížení prvků k ideálnímu tvaru hodnoceno prostřednictvím velikostí vnitřních úhlů, které svírají strany, resp. stěny prvků. V žádném případě by velikosti těchto úhlů neměly překročit 180°, případně klesnout pod 0° (záporná plocha prvku). V komerčních systémech bývají ovšem tyto hranice nastaveny přísněji a uživatel dostává obvykle varovná hlášení již u prvků, jejichž vnitřní úhly vybočují z intervalu 45-135°. Podle souvislosti (místo výskytu deformovaných prvků, kapacitní možnosti výpočtu) je pak možno navrženou síť buď přepracovat, nebo použít s výhradami, zejména s opatrným přístupem k hodnocení napětí v inkriminovaných oblastech.

Špatné podmíněnosti prvkových matic lze u prvků s uzly na hranách dosáhnout i tím, že hranový uzel bude lokalizován mimo střední třetinu délky hrany. Tato chyba je však dnes nepravděpodobná, neboť generátory sítí tyto uzly umísťují automaticky uprostřed hrany a uživatel do tohoto procesu prakticky nezasahuje. Pouze u speciálních typů trhlinových prvků je právě posunu středového uzlu záměrně využito tak, aby vznikla lokální singularita napětí, odpovídající kořeni trhliny podle teorie lineární lomové mechaniky [6].

5.3.5 Diskretizace spojitého silového zatížení

V odst.3.2.3 jsme ukázali na příkladu prutového prvku explicitní tvar matice zatížení od objemových sil, včetně fyzikální interpretace: prvky matice zatížení představují diskrétní uzlové síly, jejichž součet je roven výslednici původního spojitého zatížení. To platí jak pro spojitě objemové zatížení, tak pro plošné povrchové zatížení tělesa. Všechna vnější silová zatížení na spojitěm modelu lze tedy po diskretizaci pomocí MKP interpretovat jako soustavu sil, působících v uzlech sítě. Přejít od spojitěho k diskrétnímu vyjádření získáme dosazením koečnoprvkové aproximace posuvů ve výrazech pro potenciál vnějšího zatížení (3.3). Protože v pružnosti je obvyklé pracovat s osamělými zatěžujícími silami i v souvislosti se spojitým modelem těles, bývá funkcionál dle (3.3) rozšířen o člen, vyjadřující potenciál osamělé síly při přemístění jejího působíště:

$$P = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{o} \cdot dV + \int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{p} \cdot dS + \sum_i u_i \cdot F_i \quad (5.30)$$

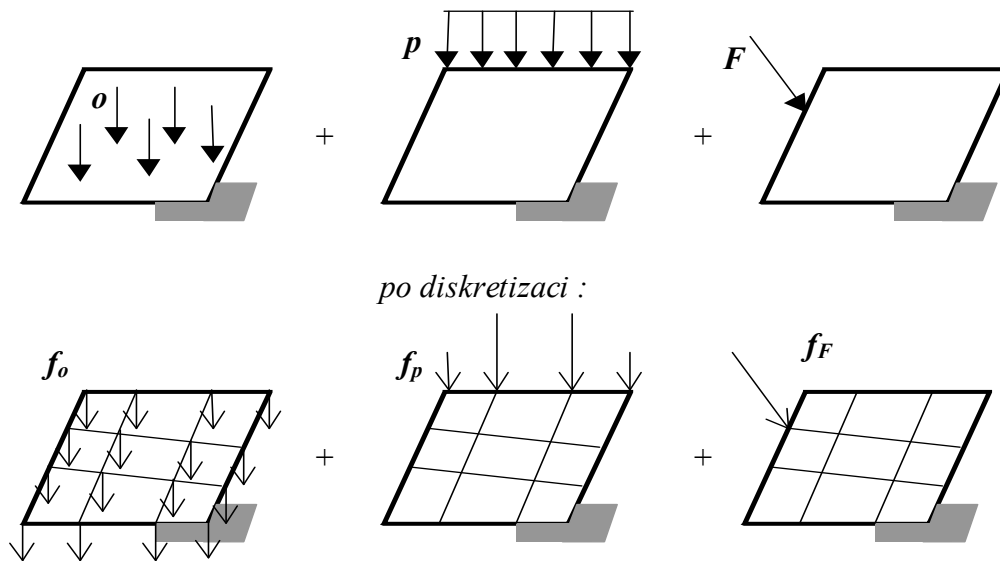
Po dosazení aproximace posuvů (3.6) a integraci přes objem, resp. povrch jednotlivých prvků, můžeme příspěvky jednotlivých zatížení vyjádřit součtem lineárních forem

$$P = \delta^T \cdot \mathbf{f}_o + \delta^T \cdot \mathbf{f}_p + \delta^T \cdot \mathbf{f}_F \quad (5.31)$$

kde vystupují prvkové matice objemového, plošného a osamělého silového zatížení \mathbf{f}_o , \mathbf{f}_p a \mathbf{f}_F . Po sestavení globálních matic součtem příspěvků od jednotlivých prvků (viz odst.3.2.4) můžeme i celkovou matici zatížení považovat za složenou z příspěvků od objemového, povrchového plošného a osamělého zatížení

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_o + \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_F . \quad (5.32)$$

Je přitom obvyklé síť konečných prvků navrhovat tak, aby případné osamělé síly působily právě v uzlových bodech. Celý proces přechodu od spojitého k diskrétnímu modelu zatížení lze graficky znázornit takto:



Obr.5.18 Znázornění přechodu ze spojitého na diskrétní zatížení

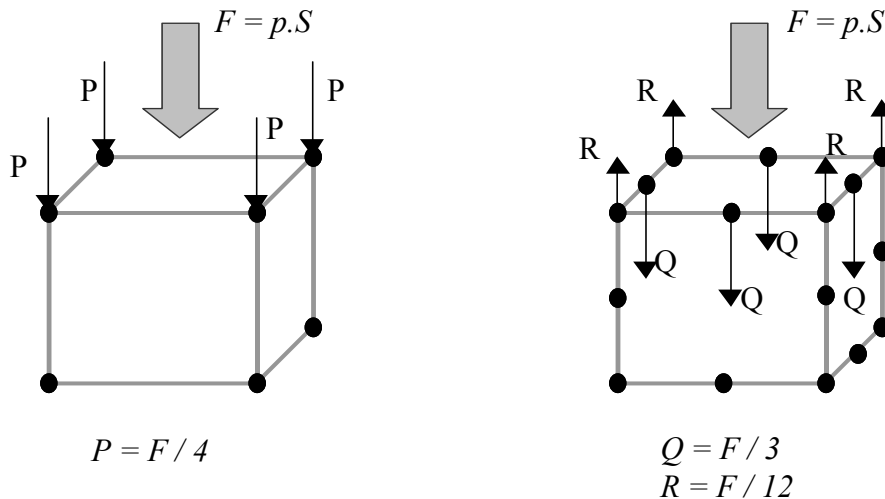
Vzhledem k tomu, že se všechny zatěžující účinky nakonec realizují vždy jako soustava sil v uzlech sítě, nabízí se otázka, zda není vhodnější při tvorbě modelu síly rovnou do uzlů zadávat a nepředepisovat vůbec spojitá zatížení. To je samozřejmě možné, není to však v mnoha případech výhodné. Ukažme tuto skutečnost zvlášť na prvcích s lineárními a kvadratickými bázovými funkcemi.

5.3.5.1 Diskretizace zatížení na lineárních prvcích

Vyčíslením explicitních tvarů matic \mathbf{f}_o a \mathbf{f}_p na lineárních prvcích lze ukázat, že celková zatěžující síla se rozkládá rovnoměrně do všech uzlů. Je-li tedy například povrch S osmiuzlového šestistěnu zatížen konstantním tlakem p , pak v příslušných uzlech zatíženého povrchu působí uzlové síly o velikosti $p \cdot S/4$ – viz obr.5.19. Podobně konstantní objemové zatížení o velikosti o generuje na prvku o objemu V ve všech uzlech stejné uzlové síly o velikosti $o \cdot V/8$. Na pravidelné síti stejných prvků s konstantním zatížením bychom tedy ekvivalentní uzlové zatížení snadno dokázali zadat sami přímo do uzlů. Již v případě nerovnoměrné sítě a nekonstantního zatížení je to však příliš pracné a automatické vytvoření matice zatížení ze spojitě rozložených sil je jediným schůdným řešením.

5.3.5.2 Diskretizace zatížení na kvadratických prvcích

Ještě složitější situace nastává u prvků s nelineární bázovou funkcí. Vzhledem k rozdílné hodnotě integrálu jednotlivých bázových funkcí dle obr.5.14. nad prvkem dochází k tomu, že při integraci výrazů 5.30. mají koncové a středové uzly stran navzájem různé váhy. Pokud jako ilustraci použijeme dvacetiuzlový šestistěn, zatížený stejně jako v předchozím odstavci plošným povrchovým zatížením p na straně o ploše S , pak konzistentní uzlové síly mají v rozích dokonce opačnou orientaci, i když celkový součet všech uzlových příspěvků dává $p.S$ – viz obr.5.19. Obráceně: pokud bychom tedy u kvadratických prvků zadali konstantní síly do všech uzlů, představuje to u odpovídajícího kontinuálního modelu proměnlivé, nikoli konstantní spojité zatížení.



Obr.5.19 Diskretizace konstantního plošného zatížení na lineárním a kvadratickém prvku

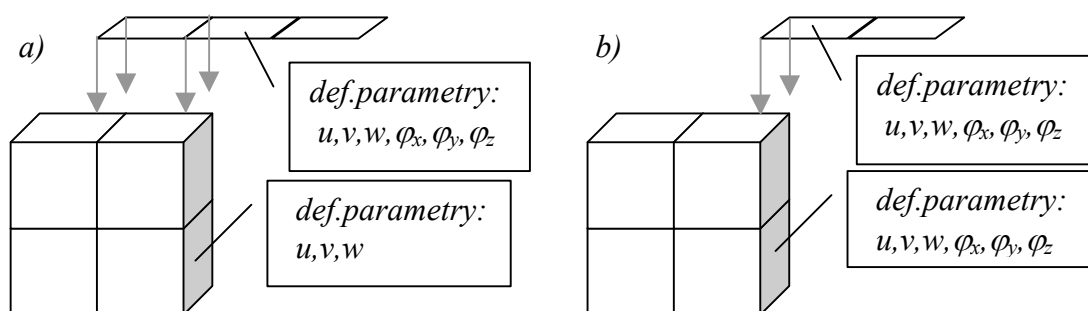
5.3.6 Srovnání základních typů prostorových prvků

O vhodnosti použití jednotlivých prostorových prvků se v literatuře vedou spory, které budou stěžejí kdy jednoznačně rozhodnuty. Použití šesti- nebo čtyřstěnu, lineárního či kvadratického prvku představuje dilema, řešitelné vždy jen s ohledem na konkrétní podmínky: složitost modelu, dostupný hardware a software, poměr ceny lidské a strojové práce, podstatné mohou být i místní pracovní zvyklosti, požadavky zadavatele výpočtu a další vlivy. Obecně platí, že vyšší kvalita kvadratických prvků z hlediska aproximace hledaných funkcí se dá nahradit použitím většího množství prvků s lineárními bázovými funkcemi. Na konkrétním [příkladu 5.3](#) je dokumentováno srovnání přesnosti jednotlivých typů prostorových prvků, pokud použijeme síť se srovnatelnou délkou hrany prvku pro všechny typy.

6 Desky, stěnodesky a skořepiny

Všechny dále uváděné tenkostěnné konečné prvky umožňují vytvoření sítě MKP na střednicové ploše analyzovaného tenkostěnného tělesa, tloušťku prvku je pak nutno zadat jako jednu ze základních charakteristických veličin prvku. Napjatost a deformace na prvku je v souladu s přijatou pracovní hypotézou pro tenkostěnná tělesa – typickým důsledkem je tedy nulové napětí ve směru normály prvku a lineární průběh zbývajících složek napětí po tloušťce. To je třeba mít na paměti zvláště při vyhodnocování výsledků: necháme-li například vykreslit maximální hlavní napětí na povrchu stěnodesky, vykreslí se pouze na jediném, v dané chvíli zvoleném povrchu ze dvou možných. Přitom druhý povrch může být z hlediska dosažených napětí kritičtější. Je proto třeba důsledně kontrolovat oba povrchy, jinak je možno snadno přehlédnout nebezpečné místo konstrukce.

Dalším společným typickým rysem tenkostěnných prvků je přítomnost deformačních parametrů typu natočení (rotace) v uzlu vedle deformačních parametrů typu posuvu, které jsme poznali v předchozích kapitolách. To je třeba respektovat při zadávání okrajových podmínek: v místě vetknutí nestačí zadat nulové posuvy, ale i příslušná natočení. Rovněž při spojování tělesových a tenkostěnných prvků je nutno nulové relativní natočení obou částí vůči sobě zadávat pomocí různých „triků“ – přeplátováním, užitím speciálních přechodových prvků nebo tělesových prvků s rotačními stupni volnosti (obr.6.1). U všech těchto metod lze zpravidla dosáhnout dobrého souladu mezi tuhostí výpočtového modelu a reálného tělesa, nelze je však použít pro analýzu napjatosti daného tvarového detailu. Pokud tedy v místě přechodu masivní do tenkostěnné části konstrukce potřebujeme hodnotit napjatost, je třeba celou oblast modelovat s využitím dostatečně jemné sítě tělesových 3D prvků.

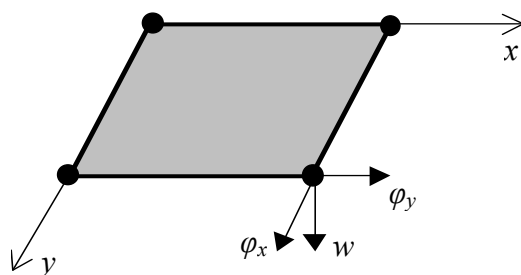


Obr.6.1 Spojení masivních a tenkostěnných prvků při a) rozdílných, b) stejných deformačních parametrech v uzlu

6.1 Deskový prvek

Prvek pro řešení tenkých desek bez vlivu posouvajících sil má řadu analogií s nosníkovým prvkem dle odst. 4.2. Z důvodů konvergence je nutno zajistit kromě spojitosti průhybů i mezivprvkovou spojitost natočení střednice, a to alespoň v uzlových bodech. Nejběžnější čtyřúhelníkový prvek s uzly ve vrcholech má pak celkem 12 deformačních parametrů,

v každém uzlu je to průhyb w a natočení φ_x, φ_y – viz obr.6.2. Platí přitom vztahy teorie tenkých desek $\varphi_x = w_{,x}$; $\varphi_y = w_{,y}$ (symboly $w_{,x}$, $w_{,y}$ značí parciální derivaci průhybu podle odpovídající souřadnice x, y).



Obr.6.2 Čtyřuzlový deskový prvek se dvanácti deformačními parametry

Neznámá funkce průhybu je aproximována obvyklým způsobem

$$w(x, y) = \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}, \quad (6.1)$$

$$\boldsymbol{\delta}^T = [w_1, \varphi_{x1}, \varphi_{y1}, w_2, \varphi_{x2}, \dots, \varphi_{x4}, \varphi_{y4}], \quad \mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ \dots \ N_{12}] \quad (6.2)$$

kde $N_1 - N_{12}$ jsou neúplné polynomy 4.stupně v proměnných x, y . Složky křivosti, získané druhou derivací průhybu, jsou uspořádány v matici $\boldsymbol{\kappa} = [w_{,xx} \ w_{,yy} \ 2w_{,xy}]$,

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{B} \boldsymbol{\delta}, \quad (6.3)$$

matice \mathbf{B} je podobně jako v případě ohybaného nosníku odvozena z \mathbf{N} dvojí parciální derivací. Energie napjatosti ohybané desky je

$$W = \frac{1}{2} \iint_S \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{D}_m \boldsymbol{\kappa} \, dx dy, \quad (6.4)$$

kde
$$\mathbf{D}_m = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \begin{vmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{vmatrix}$$

je matice ohybové tuhosti desky z izotropního Hookeovského materiálu. Dosazením (6.3) do (6.4) získáme výraz pro energii napjatosti ve tvaru

$$W = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{k}_m \boldsymbol{\delta}, \quad (6.5)$$

kde matice tuhosti čtyřúhelníkového deskového prvku

$$\mathbf{k}_m = \iint_S \mathbf{B}^T \mathbf{D}_m \mathbf{B} \, dx dy. \quad (6.6)$$

Takto formulovaný prvek je schopen přenášet pouze ohybové namáhání a z uživatelského hlediska je charakterizován následujícími parametry:

Vstupní údaje:

- geometrie: poloha uzlových bodů, tloušťka
- materiálové parametry

Výstupní údaje:

- průhyby a natočení střednicové roviny prvku
- složky napětí a přetvoření na horním (spodním) povrchu desky
- liniové ohybové a kroutící momenty

6.2 Deskový prvek s vlivem smyku

Vliv smyku u deskového prvku, významný v případě tlustých desek, je zaveden obdobně jako u nosníku (odst. 4.3). Celkové natočení příčného řezu kolem osy y , x je ovlivněno příspěvkem od posouvajících sil

$$\varphi_x = w_{,x} + \gamma_x ; \quad \varphi_y = w_{,y} + \gamma_y . \quad (6.7)$$

Rovněž celková energie napjatosti musí být rozšířena o energii smykové napjatosti

$$W = \frac{1}{2} \iint_S (\boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{D}_m \boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{D}_t \boldsymbol{\gamma}) dx dy , \quad (6.8)$$

kde matice \mathbf{D}_m , \mathbf{D}_t představují ohybovou, resp. smykovou tuhost desky a

$$\boldsymbol{\kappa}^T = \left[\varphi_{x,x} \quad \varphi_{y,y} \quad \varphi_{x,y} + \varphi_{y,x} \right] , \quad \boldsymbol{\gamma}^T = \left[\gamma_x \quad \gamma_y \right] . \quad (6.9)$$

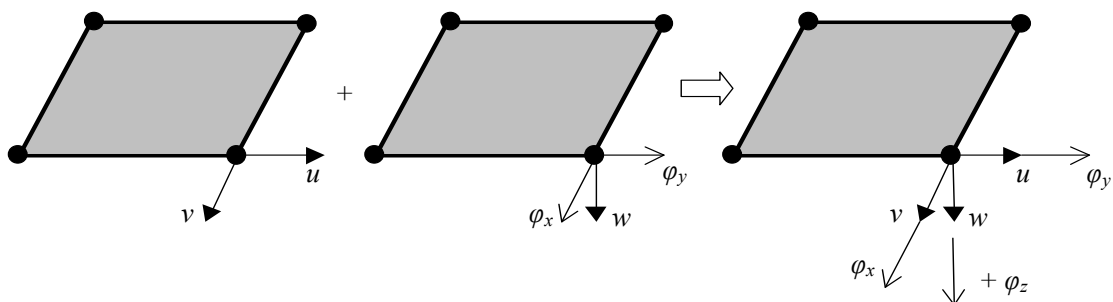
Neznámé deformační parametry w , φ_x , φ_y jsou stejné jako v případě tenké desky dle obr.6.2. Vzhledem k vyjádření energie napjatosti, v němž se všechny uvedené veličiny vyskytují maximálně v první derivaci, snižuje se oproti tenkým deskám požadavek mezivprvkové spojitosti. Všechny uvedené veličiny je proto možno nad prvkem aproximovat nezávisle bilineárními bázovými funkcemi, splňujícími pouze mezivprvkovou spojitost funkčních hodnot aproximovaných veličin, podobně jako u stěnového prvku dle obr.5.11a:

$$w = \sum_{i=1}^4 N_i w_i , \quad \varphi_x = \sum_{i=1}^4 N_i \varphi_{xi} , \quad \varphi_y = \sum_{i=1}^4 N_i \varphi_{yi} . \quad (6.10)$$

Zahrnutí vlivu smyku výše uvedeným způsobem tak vede na jednodušší formulaci plně kompatibilního prvku, než je tomu u tenkých desek. U tohoto prvku se však mohou objevit problémy se „smykovým zablokováním“ – nadhodnocením smykové tuhosti u desek malých tloušťek, které se obvykle odstraňují redukcí smykové složky tuhosti výsledné matice \mathbf{k} . Podrobné pojednání o této problematice je možno najít ve [4], [6].

6.3 Stěnodeskový prvek

Čtyřúhelníkový stěnodeskový prvek kombinuje vlastnosti odpovídajícího stěnového a deskového prvku, jak je schematicky naznačeno na obr.6.3. Výslednou matici tuhosti je možno získat z obou předchozích stejným postupem jako u rámového prvku v odst.4.4.



Obr. 6.3 Stěnodeskový prvek jako kombinace stěny a desky

Jestliže osm deformačních parametrů stěnového prvku δ_s dle obr.5.10 a dvanáct parametrů deskového prvku δ_d dle (6.2) sdužíme do jediné matice deformačních parametrů

$$\delta = \begin{vmatrix} \delta_s \\ \delta_d \end{vmatrix}, \quad (6.11)$$

pak obdobným způsobem získáme i výslednou matici tuhosti stěnodeskového prvku

$$\mathbf{k}_{sd} = \begin{vmatrix} \mathbf{k}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_d \end{vmatrix}, \quad (6.12)$$

kde \mathbf{k}_s , \mathbf{k}_d jsou dílčí matice tuhosti samostatných stěnových a deskových prvků. Desková složka přitom může či nemusí obsahovat vliv smyku na deformaci. Takto formulovaný prvek má pět stupňů volnosti v uzlu, chybí mu rotace kolem osy z, která je potřebná v případě, že chceme navzájem spojovat prvky, neležící v jedné rovině. Z tohoto důvodu je obvyklé chybějící deformační parametr přidat a odpovídajícím způsobem rozšířit matici tuhosti \mathbf{k}_{sd} . Zpravidla se to děje zadáním nenulové tuhosti, odvozené z tuhosti okolí, na diagonálu matice \mathbf{k}_{sd} .

Při výše uvedeném sestavení matice tuhosti stěnodeskového prvku je celková energie napjatosti součtem dvou nezávislých příspěvků od stěnové a ohybové složky. Prvek je proto možno použít pouze v lineární oblasti, kdy platí princip superpozice, a oprávněnost použití je třeba zpětně zkontrolovat kritickým posouzením výsledků. Základní charakteristiky prvku jsou kombinací vlastností stěnového a deskového prvku:

Vstupní údaje:

- geometrie: poloha uzlových bodů, tloušťka
- materiálové parametry

Výstupní údaje:

- posuvy a natočení střednicové roviny prvku
- složky napětí a přetvoření na střednicové i obou povrchových plochách
- liniové ohybové a kroutící momenty, posouvající a normální síly
- uzlové síly a momenty

6.4 Skořepinové prvky

Skořepina jako těleso s obecně zakřivenou střednicovou plochou vyžaduje dostatečně přesnou aproximaci geometrického tvaru. Tu lze zajistit jemnou sítí rovinných stěnodeskových prvků se šesti deformačními parametry v uzlu dle obr.6.3, které po částech kopírují tvar skořepiny. Kromě rovinných prvků se rovněž používá stěnodeskových prvků s možností zakřivení

střednicové plochy – např. osmiuzlový izoparametrický prvek dle obr.5.15b, rozšířený ovšem o ohybové členy v prvcích matice tuhosti. V komerčních systémech MKP se proto obvykle nerozlišuje mezi stěnodeskovým a skořepinovým prvkem – tentýž typ může být použit v obou případech. V systému ANSYS lze použít buď čtyřuzlové prvky SHELL63, SHELL43 nebo SHELL181, jejichž uzly nemusejí ležet v téže rovině. První z prvků je vhodný pro elastický materiál, druhý pro materiálové nelinearity a obecně nelinearity nepříliš silné, poslední pak pro silné materiálové a geometrické nelinearity. Ilustrace využití prvku SHELL63 pro řešení napjatosti T-kusu potrubí je uvedena jako [Příklad 6.1](#). V případě skořepin je třeba mít vždy na paměti, že tenkostěnný charakter problému v mnoha případech vede k porušení předpokladů o linearitě a vyžaduje tedy nelineární algoritmus řešení (velké změny geometrie, ztráta stability). Nekritické přijetí výsledků pouhé lineární analýzy v takovém případě vede k zásadním chybám celého výpočtového řešení.

Pro lepší aproximaci zakřiveného tvaru střednicové plochy skořepin je vhodné použít osmiuzlového stěnodeskového prvku SHELL93, zahrnujícího všechny typy výše zmíněných nelinearit.

7 Přehled základních typů prvků systému ANSYS

Knihovny konečných prvků jednotlivých systémů MKP nabízejí obvykle desítky různých typů prvků. Pro představu o nejběžnějších možnostech uvádíme z knihovny systému ANSYS jen úzký výběr prvků, vhodných k řešení běžných typů konstrukcí. Všechny uváděné prvky jsou použitelné i pro geometricky nelineární analýzu.

Prvek	Charakteristika	Počet uzlů	Def.param.
LINK1	osový tah-tlak ve 2D (obr.4.1)	2	u, v
LINK8	osový tah-tlak ve 3D (obr.4.2)	2	u, v, w
LINK10	pouze tah (lano) nebo pouze tlak (kontakt) ve 3D	2	u, v, w
BEAM3	tah, tlak a ohyb s vlivem smyku ve 2D, elast.materiál (obr.4.4)	2	u, v, φ_z
BEAM23	beam3 + plasticita a creep (obr.4.4)	2	u, v, φ_z
BEAM4	tah, tlak, krut a ohyb s vlivem smyku ve 3D, elast.materiál (obr.4.5)	2	u, v, w, $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$
BEAM24	beam4 + plasticita a creep (obr.4.5)	2	u, v, w, $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$

Tab.7.1 Nejběžnější prutové prvky systému ANSYS

Prvek	Charakteristika	Počet: uzlů	def.param.
PLANE2	trojúhelník, membránová a rotačně symetric.napjatost ve 2D, materiálová nelinearita (obr.5.15c)	6	u, v
PLANE42 PLANE182	čtyřúhelník, membránová a rotačně symetric.napjatost ve 2D, materiálová nelinearita (obr.5.10)	4	u, v
PLANE82 PLANE183	čtyřúhelník, membránová a rotačně symetric.napjatost ve 2D, materiálová nelinearita (obr.5.15b)	8	u, v
SHELL41	čtyřúhelník, membránová napjatost ve 3D	4	u, v, w
SHELL43	čtyřúhelník, membránová a ohybová napjatost ve 3D, materiálová nelinearita (obr.6.3)	4	u, v, w, $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$
SHELL63	čtyřúhelník, membránová a ohybová napjatost ve 3D (obr.6.3)	4	u, v, w, $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$
SHELL93	zakřivený čtyřúhelník, membránová a ohybová napjatost ve 3D, mater. nelinearita	8	u, v, w, $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$

Tab.7.2 Nejběžnější plošné prvky systému ANSYS

Prvek	Charakteristika	Počet uzlů	Def.param.
SOLID45 SOLID185	8-uzlový šestistěn včetně degenerovaných tvarů (obr.5.13), obecná napjatost, materiálová nelinearita	8 (6,5,4)	u, v, w
SOLID73	8-uzlový šestistěn včetně degen. tvarů s rotačními stupni volnosti v uzlu, vhodný ke spojení se s prvky typu SHELL	8 (6,5,4)	u, v, w, $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$
SOLID95 SOLID186	20-uzlový šestistěn včetně degenerovaných tvarů (obr.5.16), obecná napjatost, materiálová nelinearita	20 a méně	u, v, w

Tab.7.3 Nejběžnější tělesové prvky systému ANSYS

8 Základní soustava rovnic a její řešení

Již v odstavci 3.2.4 jsme se seznámili se způsobem, jak sestavit z lokálních matic tuhosti prvků globální matici tuhosti \mathbf{K} , která posléze vystupuje jako matice koeficientů soustavy lineárních algebraických rovnic

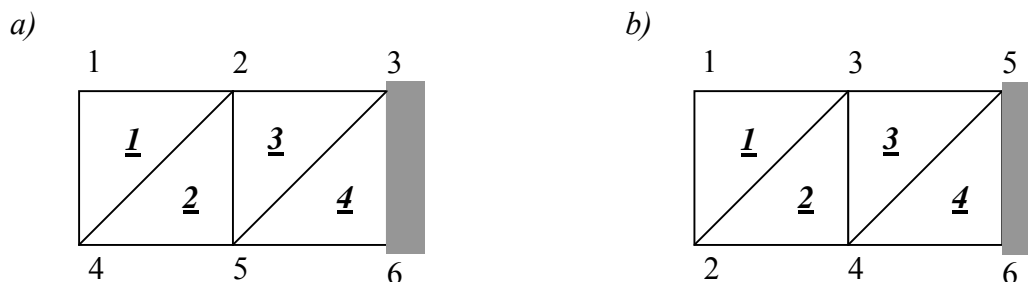
$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (8.1)$$

při řešení statické úlohy. Tato matice má výhodnou pásovou strukturu, která spolu s dalšími numerickými vlastnostmi, jako je pozitivní definitnost, přispívá k efektivní řešitelnosti i velmi rozsáhlých problémů. V ilustrativním případě odst.3.2.4 se dokonce jednalo o třídiagonální matici. Při použití nepravidelných, topologicky komplikovaných rovinných či prostorových sítí samozřejmě výsledné matice nejsou třídiagonální, neznámé deformační parametry v matici \mathbf{U} se však dají vždy uspořádat tak, že koeficienty jsou v matici \mathbf{K} rozmístěny v relativně úzkém pásu okolo hlavní diagonály. V následujících odstavcích stručně naznačíme, jak souvisí číslování prvků a uzlů sítě se strukturou matice \mathbf{K} a jaký vliv má tato struktura na proces řešení soustavy (8.1). Pro rychlou orientaci v následujícím textu doporučujeme nejprve vrátit se krátce k odst.3.2.4.

8.1 Struktura globální matice tuhosti

Uvažujme rovinný model vetknutého nosníku, jehož výpočtová síť je tvořena čtyřmi trojúhelníkovými prvky se dvěma deformačními parametry v uzlu – u, v . Nechť je očíslování uzlů a prvků provedeno v souladu s obr.8.1a. V souladu s uzlovými čísly jsou uloženy i deformační parametry v globální matici \mathbf{U}

$$\mathbf{U} = [u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4, u_5, v_5, u_6, v_6]. \quad (8.2)$$



Obr.8.1 Vliv číslování uzlů sítě na strukturu matice tuhosti

Prvnímu prvku dle obr.8.1a přitom přísluší parametry $u_1, v_1, u_2, v_2, u_4, v_4$, umístěné na pozicích č.1-4, 7 a 8 matice \mathbf{U} . Matice tuhosti prvního prvku s původním rozměrem 6x6 bude proto po rozšíření na dimenzi 12x12 (tj. na rozměr globální matice \mathbf{K}) obsahovat nenulové příspěvky na pozicích v 1.-4., 7. a 8. řádku a sloupci:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} k_1 & k_1 & k_1 & k_1 & 0 & 0 & k_1 & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & k_1 & k_1 & k_1 & 0 & 0 & k_1 & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & k_1 & k_1 & 0 & 0 & k_1 & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & k_1 & 0 & 0 & k_1 & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & k_1 & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

Sym.

Sečtením takto rozšířených matic všech čtyř prvků, v souladu s výkladem dle odst.3.2.4, získáme matici \mathbf{K} s takto obsazenými nenulovými pozicemi:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_1 & k_1 & k_1 & 0 & 0 & k_1 & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & k_1 & k_1 & k_1 & 0 & 0 & k_1 & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & k_{1+2+3} & k_{1+2+3} & k_3 & k_3 & k_{1+2} & k_{1+2} & k_{2+3} & k_{2+3} & 0 & 0 \\ & & & k_{1+2+3} & k_3 & k_3 & k_{1+2} & k_{1+2} & k_{2+3} & k_{2+3} & 0 & 0 \\ & & & & k_{3+4} & k_{3+4} & 0 & 0 & k_{3+4} & k_{3+4} & k_4 & k_4 \\ & & & & & k_{3+4} & 0 & 0 & k_{3+4} & k_{3+4} & k_4 & k_4 \\ & & & & & & k_{1+2} & k_{1+2} & k_2 & k_2 & 0 & 0 \\ & & & & & & & k_{1+2} & k_2 & k_2 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & k_{2+3+4} & k_{2+3+4} & k_4 & k_4 \\ & & & & & & & & & k_{2+3+4} & k_4 & k_4 \\ & & & & & & & & & & k_4 & k_4 \\ & & & & & & & & & & & k_4 \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

Sym.

Indexy uvnitř matice označují číslo konečného prvku na obr.8.1a, jenž svojí tuhostí přispívá k výsledné tuhosti na dané pozici matice \mathbf{K} . I zde je patrná pásová struktura matice tuhosti, kterou můžeme charakterizovat šířkou pásu (přesněji polopásu), což bude hodnota pozice od hlavní diagonály nejvzdálenějšího nenulového prvku. Pokud pozici na hlavní diagonále označíme hodnotou 1, pak v našem případě je šířka pásu rovna 8.

Zopakujme nyní celý postup pro jiné očíslování sítě, a to podle obr.8.1b. Snadno se přesvědčíme, že matice \mathbf{K} bude mít nyní nejkompaktnější možnou podobu se šířkou pásu matice rovnou šesti:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix}
k_1 & k_1 & k_1 & k_1 & k_1 & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& k_1 & k_1 & k_1 & k_1 & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & k_{1+2} & k_{1+2} & k_{1+2} & k_{1+2} & k_2 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & & k_{1+2} & k_{1+2} & k_{1+2} & k_2 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & & & k_{1+2+3} & k_{1+2+3} & k_{2+3} & k_{2+3} & k_3 & k_3 & 0 & 0 \\
& & & & & k_{1+2+3} & k_{2+3} & k_{2+3} & k_3 & k_3 & 0 & 0 \\
& & & & & & k_{2+3+4} & k_{2+3+4} & k_{3+4} & k_{3+4} & k_4 & k_4 \\
& & & & & & & k_{2+3+4} & k_{3+4} & k_{3+4} & k_4 & k_4 \\
& & & & & & & & k_{3+4} & k_{3+4} & k_4 & k_4 \\
& & & & & & & & & k_{3+4} & k_4 & k_4 \\
& & & & & & & & & & k_4 & k_4 \\
& & & & & & & & & & & k_4
\end{bmatrix}. \quad (8.5)$$

Sym.

Způsob očíslování uzlů, podle něhož jsou neznámé parametry ukládány v matici \mathbf{U} , ovlivňuje tedy významným způsobem strukturu matice tuhostí. Ve většině rozsáhlejších praktických úloh nelze dosáhnout úplně kompaktního uspořádání, jako v uvedeném případě matice dle (8.5) – takové uspořádání je možné pouze v jednoduché ilustrativní úloze. Vždy však existuje jedna nebo více variant optimálního očíslování uzlů, při kterém je šířka pásu matice minimální. Dosáhnout minimální šířky pásu na dané síti je přitom velmi žádoucí jednak z hlediska množství ukládaných dat, neboť vzhledem k symetrii a pásovosti se z matice \mathbf{K} ukládá do paměti jen jeden polopás, a zejména z hlediska efektivnosti řešení soustavy (8.1). Z rozboru přímých algoritmů řešení, které jsou vždy určitou modifikací Gaussovy eliminační metody aplikované na soustavu s pásovou maticí vyplývá, že počet operací a tím délka výpočtu jsou lineárně závislé na počtu neznámých a kvadraticky na šířce pásu, tedy

$$\text{délka výpočtu} \approx (\text{počet neznámých}) \cdot (\text{šířka pásu})^2$$

V současné době je minimalizace šířky pásu u všech komerčních systémů MKP zajištěna automaticky pomocí programových procedur, které zajišťují téměř optimální očíslování navržené sítě. Přesto by měl mít uživatel představu, jaké šířky pásu a počty neznámých může pro řešení svých úloh očekávat. Podle toho bude volit odpovídající hardware a v konkrétních případech i algoritmus řešení soustavy (8.1). Některé komerční systémy dále mohou v licenčních podmínkách omezovat uživatele právě maximální použitelnou šířkou pásu, resp. šířkou fronty u frontální metody.

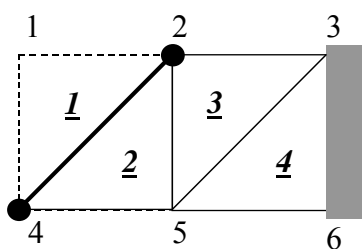
8.2 Frontální metoda řešení soustavy

Gaussova eliminační metoda i řada jejích modifikací je dostatečně popsána v učebních tectech numerické matematiky a lineární algebry. Zde se budeme podrobněji věnovat pouze frontální metodě, která je sice rovněž modifikovanou variantou Gaussovy eliminace, vznikla však přímo v souvislosti s konečnými prvky a je využívána řadou komerčních systémů MKP. Podstatou frontální metody je spojení etapy sestavování a řešení soustavy rovnic (8.1) do jediného simultánního procesu. Prakticky to probíhá tak, že příspěvky od jednotlivých prvkových matic tuhosti jsou vkládány do globální matice postupně podle čísel prvků. Nově vkládané parametry tuhosti jsou přitom umísťovány na nejbližší volná místa, deformačním parametrům jsou tak interně přiřazována pořadová čísla, která nesouvisí s očíslováním uzlů, jak tomu bylo v předchozím odstavci, ale s posloupností čísel prvků. Před zahrnutím matice tuhosti dalšího prvku je provedena kontrola, zda se mezi sestavovanými rovnicemi již nachází některá kompletní, k níž v následujícím procesu již nepřibude žádný příspěvek. Pokud ano,

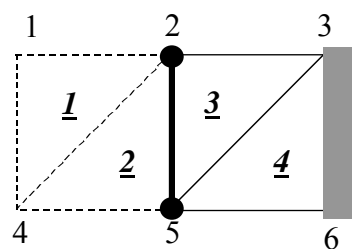
provede se u této rovnice jeden krok přímého chodu Gaussovy eliminace a upravený řádek koeficientů matice je odsunut do vnější paměti mimo vnitřní paměťový prostor RAM. Na uvolněné místo pak lze zapsat tuhostní koeficienty, náležející novému deformačnímu parametru následně zapisovaného prvku. Důsledkem této úpravy je to, že matice tuhosti se nikdy nevyskytne sestavená ve své úplnosti a proces eliminace se díky průběžnému odsouvání již vyřešených rovnic odehrává na podstatně menším pracovním prostoru s menšími nároky na vnitřní operační paměť. To je hlavní přednost frontální metody.

Na příkladu rovinné sítě dle obr.8.2 by popsán proces vypadal následovně: po zapsání prvkové matice prvku č.1 do pracovního prostoru matice \mathbf{K} ve vnitřní paměti by proběhla eliminace neznámých u_1, v_1 , jejichž rovnice jsou v tento okamžik kompletní. Pro tuto částečnou eliminaci je podstatné, že se odehrává nad maticí rozměru 6×6 , nikoli nad úplnou maticí \mathbf{K} o rozměru 12×12 . Upravené řádky matice, odpovídající neznámým parametrům u_1, v_1 jsou odsunuty mimo pracovní prostor, v němž nadále zůstávají pouze tuhostní parametry, příslušející deformačním parametrům na hranici mezi již odeliminovanou a dosud nenačtenou skupinou prvků – v našem případě jsou to deformační parametry v uzlech č.2 a 4 na obr.8.2. Počet těchto „aktivních“ deformačních parametrů na uvedené hranici – frontě – je označován jako „délka fronty“, někdy též „šířka fronty“. V dalším kroku je do pracovního prostoru načtena matice tuhosti 2. prvku a opět jsou odeliminovány neznámé parametry u_4, v_4 , jejichž rovnice jsou v tento okamžik kompletní. „Fronta“ se tak posune na spojnici uzlů č.2 a 5. Proces řešení (přímý chod) si tak lze vizuálně představit jako postupný posun fronty přes celou řešenou oblast. Při zpětném chodu Gaussovy eliminace je proces obrácený – fronta prochází zpět řešenou oblastí a z vnější paměti jsou zpět načítány upravené řádky soustavy, nutné pro vyčíslování neznámých v procesu zpětné substituce.

Z uvedeného je patrné, že šířka fronty rozhoduje o velikosti nutného pracovního prostoru v operační paměti a o efektivnosti celého procesu řešení. Právě výrazné snížení požadavků na velikost operační paměti je příčinou popularity frontální metody. Šířka fronty má tedy u frontální metody stejnou roli jako šířka pásu u soustav, řešených standardním způsobem, a snahou je opět šířku fronty minimalizovat. Fronta však závisí na očíslování prvků, nikoli uzlů jako u pásového algoritmu. Stejně jako u pásového algoritmu, i u frontální metody nabízejí komerční systémy automatické přečíslování prvků s cílem minimalizovat šířku fronty.



Poloha fronty po eliminaci neznámých u_1, v_1



Poloha fronty po eliminaci neznámých u_4, v_4

Obr.8.2 Schematické znázornění frontální metody řešení rovnic

8.3 Substruktury, makroprvky

Další možností efektivního řešení velmi rozsáhlých soustav rovnic MKP je rozdělení řešené oblasti na podoblasti (též *substruktury*, *domény*, *subdomény*) a provedení předeliminace

neznámých na jednotlivých podoblastech před sestavením výsledné soustavy rovnic. Uvažujme podoblast A dle obr.8.3. Soustavu rovnic pro tuto podoblast můžeme zapsat

$$\mathbf{K}_A \cdot \mathbf{U}_A = \mathbf{F}_A \quad (8.6)$$

Pokud rozdělíme deformační parametry do dvou submatic, kde \mathbf{U}_H sdružuje všechny parametry ležící na hranici oblasti A, \mathbf{U}_V všechny parametry ležící uvnitř oblasti A, můžeme podobně rozepsat celou soustavu (8.6) takto

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{HH} & \mathbf{K}_{HV} \\ \mathbf{K}_{VH} & \mathbf{K}_{VV} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{U}_H \\ \mathbf{U}_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_H \\ \mathbf{F}_V \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

Submatice \mathbf{K}_{HH} , \mathbf{K}_{VV} , představují tuhostní vazby uvnitř skupiny hraničních, resp. vnitřních uzlů, \mathbf{K}_{HV} pak vazby mezi těmito skupinami navzájem. Podobně lze interpretovat i submatice zatížení \mathbf{F}_H , \mathbf{F}_V jako zatížení, působící na hraniční, resp. vnitřní uzly podoblasti. Na soustavu (8.7) lze pohlížet jako na dvě maticové rovnice. Jestliže z druhé z nich vyjádříme \mathbf{U}_V

$$\mathbf{U}_V = \mathbf{K}_{VV}^{-1} (\mathbf{F}_V - \mathbf{K}_{VH} \mathbf{U}_H) \quad (8.8)$$

a dosadíme do první, získáme soustavu, jejíž neznámé jsou pouze deformační parametry hraničních uzlů \mathbf{U}_H

$$(\mathbf{K}_{HH} - \mathbf{K}_{HV} \mathbf{K}_{VV}^{-1} \mathbf{K}_{VH}) \mathbf{U}_H = \mathbf{F}_H - \mathbf{K}_{HV} \mathbf{K}_{VV}^{-1} \mathbf{F}_V \quad (8.9)$$

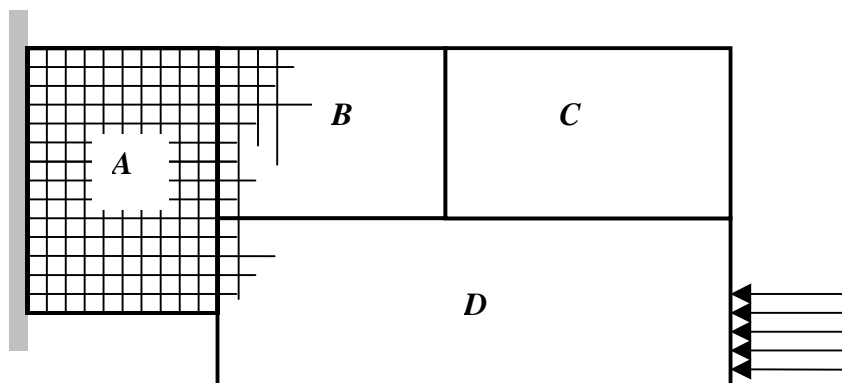
neboli

$$\mathbf{K}_A^* \cdot \mathbf{U}_H = \mathbf{F}_A^* \quad (8.10)$$

Vnitřní deformační parametry podoblasti A byly tak předeliminací odstraněny a matice \mathbf{K}_A^* má podstatně menší dimenzi, než původní matice \mathbf{K}_A . Uvedený postup můžeme nyní zopakovat na všech podoblastech dané úlohy dle obr.8.3 a výslednou matici \mathbf{K}^* sestavíme z předeliminovaných matic \mathbf{K}_A^* , \mathbf{K}_B^* , \mathbf{K}_C^* , \mathbf{K}_D^* . Výsledná soustava

$$\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{U}^* = \mathbf{F}^* \quad (8.11)$$

pak obsahuje pouze neznámé deformační parametry na hranicích podoblastí, je tedy podstatně menší než původní úloha. Řešení jedné rozsáhlé úlohy je tímto způsobem rozloženo na sekvenci úloh podstatně menších rozměrů, což umožňuje vypořádat se s limitovanou kapacitou operační paměti konkrétního hardwaru. Další výrazné ušetření času a paměti lze dosáhnout ve speciálních případech, kdy jednotlivé navazující podoblasti jsou zcela identické. Jediná předeliminace pak nahradí maticové operace na všech identických podoblastech. Pokud se s určitým typem podoblastí při některých aplikacích pracuje opakovaně, je možno takovou podoblast zařadit jako „prefabrikát“ přímo do knihovny používaných konečných prvků. V této souvislosti se pak o podoblastech hovoří obvykle jako o *makroprvcích*.



Obr.8.3 Rozdělení řešené úlohy na podoblasti (domény)

Nového významu nabývá technologie substruktur v souvislosti s nástupem paralelních počítačů. Nabízí se totiž myšlenka paralelního řešení jednotlivých podoblastí na různých procesorech, vedoucí k výraznému urychlení celého výpočtu. Podmínkou úspěchu je správné rozdělení celé úlohy tak, aby došlo k rovnoměrnému vytížení všech procesorů. Použitý hardware přitom nemusí být drahý paralelní počítač, ale může se jednat o cluster osobních počítačů v rámci jednoho pracoviště, spojených v síti, podporující paralelní prostředí.

8.4 Iterační řešení základní soustavy rovnic

V počátcích rozvoje MKP se předpokládalo, že kvůli narůstání zaokrouhlovacích chyb bude pro rozsáhlejší soustavy nutno přímé řešiče velmi brzy nahradit iteračními. Rozsáhlejšími soustavami byly v té době míněny soustavy o řádově 10^2 neznámých. Tento předpoklad se ukázal mylný díky dobrým numerickým vlastnostem matic soustavy (8.1) a přímé metody se běžně používají i pro soustavy o 10^4 neznámých. Iterační řešiče se v praxi nakonec prosadily podstatně později, a to z důvodů vyšší rychlosti při řešení velmi rozsáhlých soustav s řídkými maticemi. Zhruba se dá jejich nástup časově ztotožnit s počátkem výpočtů na rozměrných prostorových sítích konečných prvků.

Přesné řešení \mathbf{U}_p soustavy (8.1) se při použití iteračního schématu hledá jako posloupnost postupných přiblížení $\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_n$, kde n není větší než dimenze matice \mathbf{K} . Na počítači s nekonečnou přesností je zaručena konvergence procesu v n iteracích, na reálném počítači však může být tento mezní počet iterací překročen a pro špatně podmíněné problémy nemusí proces vůbec konvergovat. Na rozdíl od přímých metod, kde je počet kroků vedoucích k řešení jasně dopředu znám, stojí tedy řešitel při použití iterační metody vždy v určité nejistotě ohledně délky výpočtu.

Samotný iterační proces spočívá v opakovaném řešení soustavy

$$\Delta \mathbf{U}_i = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{R}_i, \quad (8.12)$$

$$\mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{U}_i + \Delta \mathbf{U}_i \quad (8.13)$$

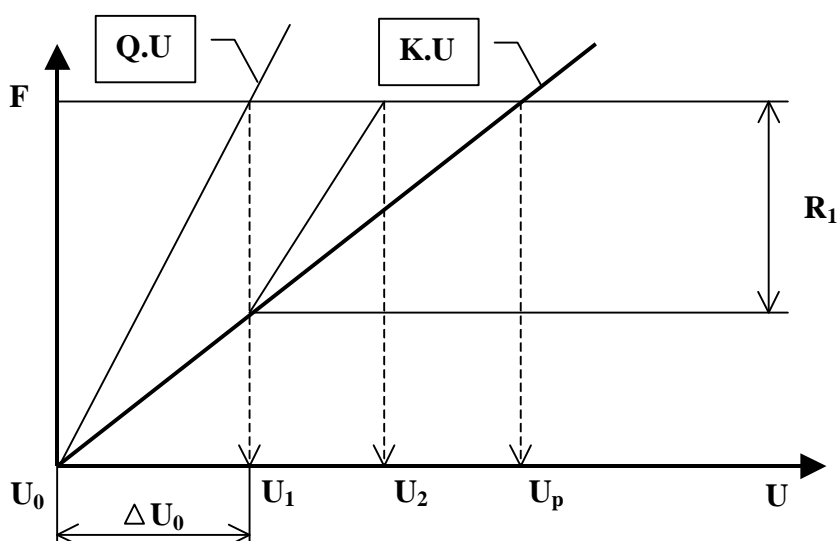
kde reziduum v i -té iteraci

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{F} - \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}_i. \quad (8.14)$$

Grafické znázornění iteračního procesu je na obr.8.4. Jako počáteční odhad řešení se zpravidla bere $\mathbf{U}_0 = \mathbf{0}$, proces je ukončen, jestliže velikost rezidua je dostatečně malá vůči celkovému vnějšímu zatížení – s uspokojivou přesností je dosaženo rovnováhy

$$\frac{\mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_i}{\mathbf{F}^T \mathbf{F}} \leq \varepsilon_F^2, \quad (8.15)$$

kde ε_F je zadaná tolerance. Hodnotou ε_F lze výrazně ovlivnit rychlost řešení (na úkor přesnosti). Většina komerčních systémů dnes nabízí rozumné volby tolerancí řešení pro různé úrovně přesnosti jako předem nastavené parametry.



Obr.8.4 Schema iteračního řešení lineární soustavy $\mathbf{K.U}=\mathbf{F}$

Základním rozdílem mezi jednotlivými iteračními řešiči je způsob konstrukce matice \mathbf{Q} , označované jako preconditioner. V zásadě je tato matice vždy nějakým způsobem odvozena z matice tuhosti \mathbf{K} tak, aby operace její inverze \mathbf{Q}^{-1} byla (na rozdíl od původní matice \mathbf{K}) triviální. Jednotlivé iterace dle (8.12) pak mohou probíhat velmi rychle. Patrně nejjednodušší volbou je převzetí neupravené hlavní diagonály matice \mathbf{K} , tedy

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(\mathbf{K}), \quad (8.16)$$

což vede na Jacobiho iterační metodu. Metoda je vhodná pro řešení dobře podmíněných problémů skalárních polí s rozsáhlými řídkými maticemi, tedy např. pro úlohy vedení tepla. Další z metod – metoda sdružených gradientů (Preconditioned Conjugate Gradients, PCG), používá komplikovanější konstrukci matice \mathbf{Q} a je vhodná pro rozsáhlé analýzy deformačních a napěťových polí. Uvádí se, že při šířkách fronty nad 1000 je použití iteračního řešiče zpravidla výhodnější, než použití frontální metody.

8.5 Volba vhodného řešiče

V současných komerčních systémech jsou zabudovány odhady času, nutného k řešení konkrétního problému s danou diskretizací. Pokud stojíme před úkolem řešit rozsáhlejší prostorový problém s šířkou fronty/pásu řádově 10^3 , je vhodné před spuštěním výpočtu využít zmíněných možností a provést pro naši úlohu odhad délky výpočtu na daném hardwaru, a to pro jednotlivé řešiče, které systém nabízí. Je třeba mít přitom na paměti, že odhady výpočtového času pro přímé metody jsou velmi přesné (známe počet kroků, vedoucích k řešení), zatímco odhady pro iterační řešiče se mohou od skutečnosti lišit až 10x, v obou směrech (neznáme potřebný počet iterací). Přímé řešení je obvykle spolehlivější: pokud obětujeme potřebný čas, dospějeme s vysokou mírou pravděpodobnosti k hledanému výsledku s technicky přijatelnou přesností. Iterační řešení je naproti tomu méně spolehlivé, zejména u hůře podmíněných úloh, jako je například masivní těleso vázané k základu pomocí poddajných prutů. Zde může iterační proces konvergovat velmi pomalu, nebo se úplně zastavit na výsledku, který představuje z technického hlediska velmi nepřesnou aproximaci

hledaného řešení. V jiných případech však může iterační řešení představovat i řádovou úsporu výpočtového času.

9 Konvergence a odhad chyby řešení

9.1 Podmínky konvergence

Jako u všech numerických metod je u MKP zásadní požadavek *konvergence* - při zhušťování sítě konečných prvků se numerické řešení musí blížit k řešení odpovídajícího spojitého problému. Aby toho bylo dosaženo, musí každý typ prvku splňovat určitá kritéria:

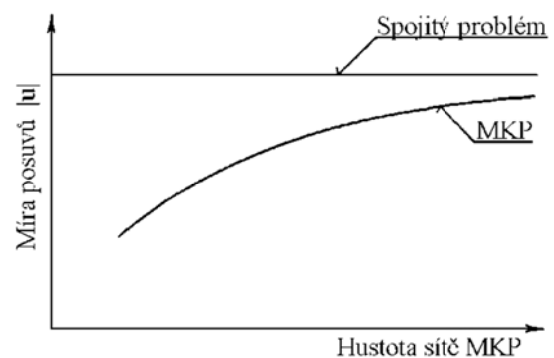
1. Na hranici mezi prvky i uvnitř prvku musí aproximované posuvy splňovat minimální požadavky spojitosti, závislé na typu úlohy. Konkrétněji: u masivních tělesových prvků s deformačními parametry u, v, w zpravidla postačuje spojitost v posuvech na hranicích; u tenkostěnných prvků s rotačními parametry v uzlech $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ je potřebná i spojitost 1. derivací posuvů, tj. hladkost průhybové čáry, resp. plochy.
2. Při posuvu prvku jako tuhého celku musí zůstat napětí i přetvoření nulová.
3. Prvek musí být schopen přesně popsat stav konstantního přetvoření.

Uvedená kritéria zde byla záměrně formulována v podobě, kterou lze v aplikační oblasti mechaniky těles snadno inženýrsky interpretovat. Z formálně matematického hlediska se jedná o podmínky úplnosti funkčních prostorů, v jejichž rámci hledáme řešení, a jejich matematicky korektní formulaci lze nalézt v [8].

Uživatel komerčního systému nemusí tato kritéria ověřovat, implementované prvky je vesměs splňují. Pozor ovšem na spojování různých typů prvků v jedné úloze, pak může snadno dojít k porušení požadavku č. 1 o

mezivprvkové spojitosti. V žádném případě nelze bez narušení konvergence přímo spojovat prvky, které mají na společné hranici různý počet uzlů nebo uzly s různými deformačními parametry. V rovinné síti může být jedna strana prvku (ať již troj- či čtyřúhelníkového) ve styku vždy jen s jednou stranou dalšího prvku. V prostorové síti se pak mohou vzájemně stýkat pouze stěny stejného tvaru – trojúhelník na trojúhelník, resp. čtyřúhelník na čtyřúhelník. Podstatné je, že pro prvky splňující požadavky č. 1–3 je exaktně dokázána konvergence, a to monotonní konvergence zdola, vyjádřeno v posuvech (viz obr. 9.1).

Znamená to tedy, že vypočtené posuvy jsou při stejném zatížení obecně menší než skutečné, diskretizovaný model je tedy tužší než spojitý. Zvyšováním počtu prvků zvyšujeme poddajnost výpočtového modelu.



Obr. 9.1 Konvergence posuvů

9.2 Odhad diskretizační chyby výpočtu

Fakt monotonní konvergence výsledků je zejména pro teoretika velmi uklidňující, řešiteli konkrétních problémů však zpravidla nestačí. Ten chce znát chybu konkrétního výpočtu při daném typu prvku a hustotě sítě. Hovoříme o *diskretizační chybě*, vzniklé řešením spojitěho problému numerickým výpočtem, poskytujícím nespojitě (resp. po částech spojitě) výsledky. Též se hovoří o *aposteriorním* odhadu chyby, čímž se zdůrazňuje, že odhad je postaven až na analýze výsledků výpočtu.

Základní problém je v tom, že hledáme chybu vzhledem ke spojitému řešení, které ovšem v prakticky řešených úlohách není známo. Vycházíme proto z míry diskontinuity numericky získaných napětí na hranici mezi prvky. Jak bylo v předchozím textu uvedeno, obvyklé předpoklady continuity, z nichž vychází korektní formulace deformační varianty MKP, vedou v důsledcích na spojitý mezivprvkový průběh posuvů, ale nespojitý průběh napětí. K získání přijatelnějšího pole napětí se obvykle provádí jeho dodatečná aproximace zprůměrováním uzlových hodnot, kterými přispívají do vybraného uzlu sousední prvky. Těmito průměrnými hodnotami je pak proložena vhodná spojitá funkce. Nad každým prvkem pak máme napětí dvojího typu: primární výsledek výpočtu σ^i , mezi prvky nespojitý, a dodatečnou spojitou aproximaci σ^a . Rozdíl mezi nimi označme $\Delta\sigma$. Na obr.9.2 jsou uvedena napětí vykreslena pro námi řešený příklad taženého prutu. Potom pro každý prvek můžeme vyčíslit chybu energie napjatosti i -tého prvku e_i jako integrál

$$e_i = \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} \Delta\sigma^T \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \Delta\sigma \, dV \quad , \quad (9.1)$$

kde \mathbf{D} je matice materiálových parametrů. Výslednou energetickou chybu celé konstrukce nebo její požadované podoblasti získáme jako součet prvkových příspěvků

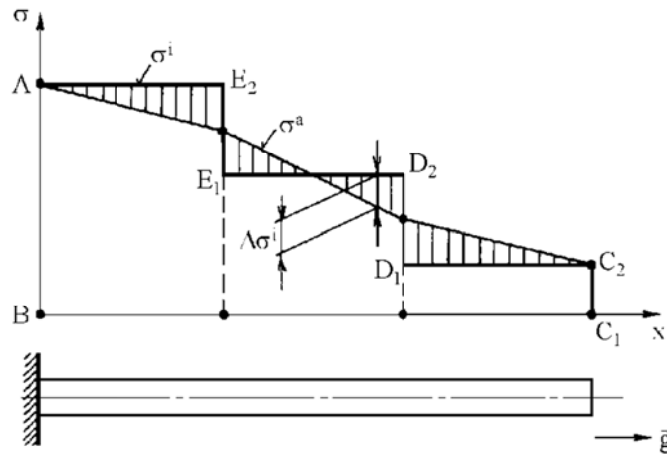
$$e = \sum_{i=1}^{N_r} e_i \quad , \quad (9.2)$$

kde e je energetická chyba celé konstrukce nebo její vybrané části, N_r počet prvků celé řešené oblasti nebo vybrané části. Energetická chyba může být vztažena k celkové energii napjatosti

$$E = 100 \cdot \sqrt{\frac{e}{U + e}} \quad , \quad (9.3)$$

kde E je relativní energetická chyba v procentech, U energie napjatosti, počítaná z neaproximovaných průběhů napětí a přetvoření. Je vhodné zdůraznit, že výše uvedený odhad chyby je principiálně schopen posoudit jen vhodnost navržené sítě vzhledem k *danému modelu geometrie*, nikoli ke skutečné geometrii. Chyba při vytváření modelu geometrie (zanedbání pevnostně důležitého tvarového detailu) je tímto přístupem nepostižitelná.

Představu o celkové energetické chybě e u námi řešené úlohy prutu dává celková vyšrafovaná plocha na obr.9.2 (bez nároku na přesnost: přesně je energetická chyba úměrná kvadrátu vyšrafovaných rozdílů, integrovanému po délce tyče). Obdobně představu o celkové energii napjatosti graficky poskytuje plocha, uzavřená čarou $ABC_1C_2D_1D_2E_1E_2A$. Podíl obou uvedených ploch je možno, opět bez nároku na přesnost, chápat jako jiný způsob vyjádření relativní energetické chyby E dle (9.3). Objektívni vypovídací schopnost chyby E , resp. e je založena na tom, že při zvyšování hustoty dělení se při použití konvergentní formulace MKP obecně snižují rozdíly mezi primárně vypočtenými a aproximovanými hodnotami napětí, a celková energie napjatosti se blíží hodnotě adekvátní spojitě úlohy. Otázkou zůstává korelace mezi energetickou chybou a přesností vyřešených napětí. Bohužel tady nelze použít žádný jednoduchý, prakticky použitelný převodní vztah. Naopak, i při velmi dobrých

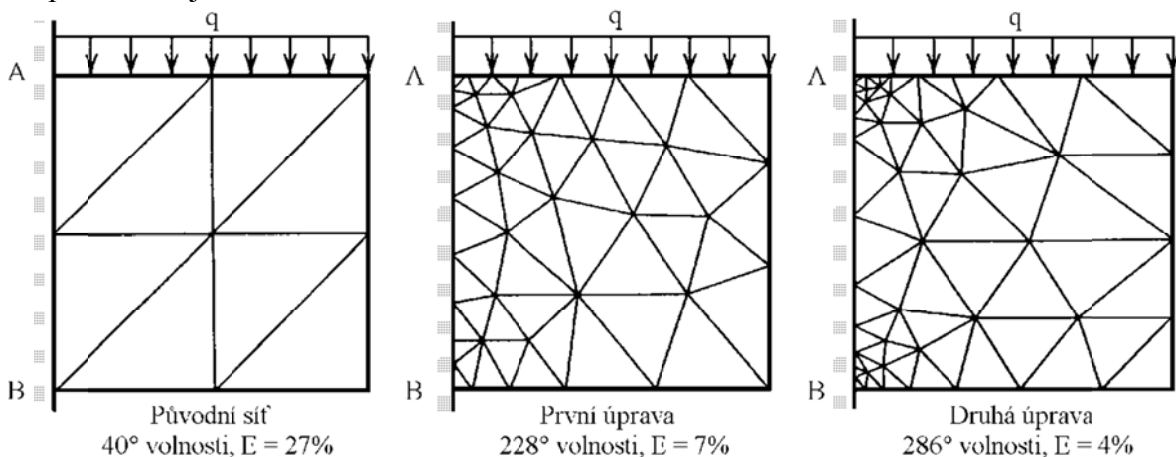


Obr.9.2 Napětí po délce prutu: primární výsledek a vyhlazený průběh

výsledcích celkové energetické chyby (2–3%) může být lokální chyba napětí v omezené části konstrukce zcela nepřijatelná (koncentrace napětí). O takových lokálně nedostatečně diskretizovaných částech konstrukce nejlépe vypovídá průběh veličiny e_i nad celou řešenou oblastí. Bylo teoreticky ukázáno, že nejefektivnější model při dané hustotě sítě je takový, pro který je hodnota energetické chyby e_i dle (9.1) pro všechny prvky stejná. Tato informace může být využita pro následné úpravy a zjemňování sítě.

9.3 Možnosti ovlivnění chyby, adaptivní algoritmus MKP

Ještě v nedávné době nebylo možno z kapacitních důvodů předpokládat vícenásobné opakování řešení téže úlohy. Byla snaha pokud možno optimálně navrhnout síť MKP a spokojit se s prvním dosaženým výsledkem. Dnes je možno po analýze chyby výsledků síť upravit a výpočet opakovat. Tento postup může být plně automatizován - hovoříme pak o *adaptivních algoritmech MKP*, stručně o adaptivních prvcích. Výhodou pro uživatele je možnost zadat vstupní síť jen velmi jednoduchou, což šetří jeho čas při přípravě vstupů. Na základě požadované přesnosti výsledků pak systém sám iteruje k optimální diskretizaci, která tuto přesnost zajistí.

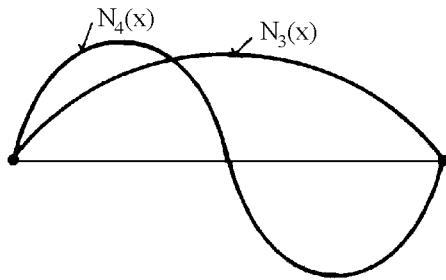


Obr.9.3 Hierarchie následných sítí při použití h -metody adaptivního algoritmu MKP

Diskretizační chybu výpočtu je možno snížit dvojnásobným způsobem - buď zvyšováním počtu prvků a uzlů při zachování stále stejného typu prvků (h -metoda, h -konvergence) nebo zvyšováním stupně polynomu aproximace posuvů (p -metoda, p -konvergence). Samozřejmě je možná i kombinace obou přístupů. První přístup, h -metoda, vede postupně k automatickému vytváření sítí, jejichž hustota je strukturovaná podle rozložení lokální chyby výpočtu. Příklad

výchozí, upravené a konečné sítě pro rovinnou úlohu s koncentrací napětí v místě vetknutí je uveden na obr.9.3. Podrobněji je rozvoj jednotlivých sítí při použití uvedeného adaptivního algoritmu dokumentován v [příkladu 9.3.1.](#)

Druhá z výše uvedených metod, p-metoda, je strategií plně a výhradně využitou například v systému Pro/MECHANICA. Při ní zůstává síť nezměněna, prvky jsou ale doplňovány o vyšší aproximační polynomy bez principiálního omezení. Konkrétně systém Pro/MECHANICA pracuje s polynomy do 9. stupně. Aby byl tento postup dostatečně efektivní, byly navrženy speciální aproximační funkce, které umožňují sestavit matici tuhosti konstrukce příslušnou



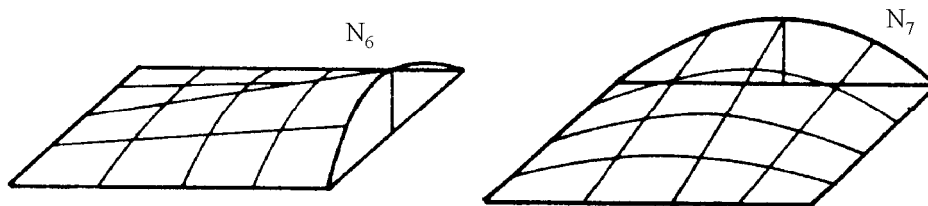
Obr.9.4 Hierarchické bázové funkce prutového prvku v p-metodě

vyšší polynomické aproximaci tak, že je přitom plně využita předchozí matice tuhosti.

Předchozí matice je tak v další iteraci jen doplněna o další příspěvky. Dosahuje se toho tak, že vyšší aproximační funkce jsou nenulové jen uvnitř konečného prvku a na jeho hranicích, ale mají nulové hodnoty v uzlech. Těmito vyššími aproximacemi jsou pak doplněny základní (lineární) bázové funkce daného prvku. Pro dříve uvedený prutový prvek jsou tak bázové funkce N_1, N_2 dle obr.3.5 doplněny například funkcemi 2. a 3. stupně - viz N_3, N_4 dle obr.9.4. V případě rovinného prvku je každá vyšší bázová funkce (kromě základních) nenulová pouze na jedné hraně a uvnitř

elementu - viz např. funkce N_6 a N_7 na obr.9.5. Proto se někdy stupně polynomu zjednodušeně přiřazují přímo jednotlivým hranám, přičemž každá hrana prvku může mít přiřazen jiný stupeň polynomu.

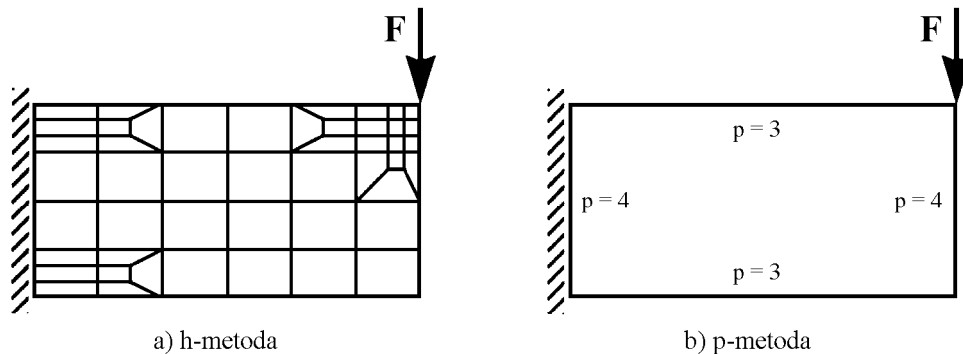
Uvedený přístup, kdy jsou jednotlivé bázové funkce doplňovány dalšími beze změny předchozích funkcí a matic, je v literatuře označován jako *hierarchický*. Hovoří se pak o hierarchických bázových funkcích, resp. *hierarchických prvcích*.



Obr.9.5 Hierarchické bázové funkce rovinného prvku

Shrneme-li nyní základní fakta adaptivního řešení h- a p-metodou, můžeme konstatovat následující. V obou případech se jedná o iterační algoritmus s postupným přibližováním k řešení odpovídajícího spojitého problému. U h-metody jednotlivé iterace odpovídají řešením na postupně modifikované síti klasických konečných prvků. U p-metody představují následující iterace řešení na téže síti (obvykle mnohem hrubší než je síť pro h-metodu) s vyššími stupni aproximačních polynomů na těch hranách (prvcích), které dosud nesplnily stanovená konvergenční kritéria. Výsledek obou přístupů je na obr.9.6: v prvním případě síť klasických prvků, strukturovaná dle gradientů napětí, ve druhém případě hrubá síť velkých prvků s optimálně rozloženými stupni aproximačních polynomů podél hranic prvků. Právě možnost použití relativně hrubé sítě s sebou přináší některé významné výhody p-metody z hlediska uživatelské přívětivosti. Pracuje se s malou knihovnou základních typů prvků a

jednoduššími sítěmi, jejichž topologie nezávisí na charakteru zatížení a gradientech napětí. Odpadá opakované vytváření modifikovaných sítí, které je zejména u větších prostorových úloh s různými typy prvků (např. masivní + skořepinové prvky) limitujícím faktorem při praktickém používání automatizovaného adaptivního řešení ve spojení s h-metodou.

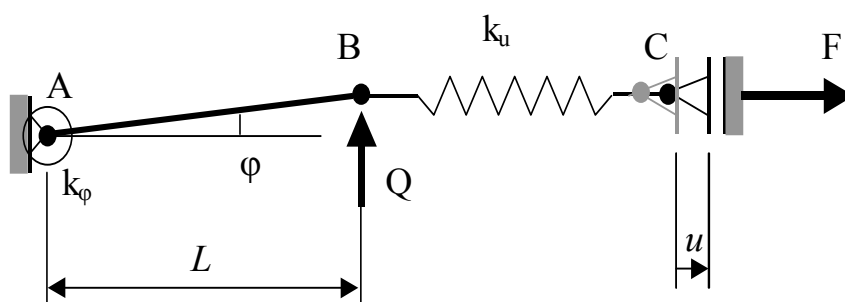


Obr.9.6 Finální diskretizace řešené oblasti

Z hlediska objektivitý srovnání musíme na závěr zdůraznit, že všechny pozitivní vlastnosti p-metody jsou bohužel omezeny na třídu lineárních úloh, rozšířenou o kontaktní problémy. V úlohách materiálově a geometricky nelineárních není algoritmus p-metody dosud dotažen do komerčně využitelného stavu. To je hlavní důvod, proč se víceúčelové komerční systémy MKP opírají dosud především o klasické konečné prvky.

10.1 Úvod

Tlakové hodnoty osových a membránových složek napětí mohou vést u tenkostěnných konstrukcí, složených z prutů, stěn či skořepin, ke ztrátě stability. Výchozí geometrická konfigurace se stává nestabilní, přechod do nové stabilní konfigurace je spojen kromě přerozdělení napětí zpravidla s velkými, funkčně nepřijatelnými deformacemi a ztrátou únosnosti celé konstrukce nebo její části. Z hlediska energetického můžeme na celý jev pohlížet jako na přeměnu akumulované energie napjatosti membránových složek napětí v energii napjatosti ohybových složek napětí. Protože membránová a ohybová tuhost jsou u tenkostěnných konstrukcí řádově rozdílné, je tento proces doprovázen právě zmíněnými velkými průhyby - boulením - střednicové plochy konstrukce. Podstatu problému lze osvětlit na příkladu s jedním stupněm volnosti dle obr.1. Tuhý přímý prut AB je v rotační vazbě A uchycen rotační pružinou s tuhostí k_φ a v podélném směru navazuje na pružinu s tuhostí k_u , která je předepnuta osovou silou F , odpovídající vodorovnému posunutí vazby C o hodnotu u . Na takto předepjatou pružnou soustavu působí v příčném směru síla Q a naším cílem je určit úhel φ , o který se pootočí prut AB.



Obr.1.1 Stabilita – soustava s jedním stupněm volnosti

Celková potenciální energie předepnuté soustavy s vlivem příčné síly Q je rovna

$$\pi = \frac{1}{2} k_\varphi \varphi^2 + \frac{1}{2} k_u [(L - L \cos \varphi) + u]^2 - QL \sin \varphi . \quad (1.1)$$

Z podmínky $\partial \pi / \partial \varphi = 0$ získáme hodnotu φ v rovnovážném stavu:

$$k_\varphi \varphi + k_u [(L - L \cos \varphi) + u] L \sin \varphi = QL \cos \varphi . \quad (1.2)$$

Pro malý úhel φ , kdy $\sin \varphi = \varphi$ a $\cos \varphi = 1$ platí

$$k_\varphi \varphi + k_u u L \varphi = QL \quad (1.3)$$

nebo, pokud uvážíme, že $k_u u = F$

$$(k_\varphi + FL) \varphi = QL . \quad (1.4)$$

Výraz v závorce představuje celkovou tuhost analyzované soustavy v příčném směru a je zřejmé, že se skládá ze dvou příspěvků. Prvním je tuhost rotační pružiny k_φ , která nezávisí na osovém předpětí. U klasického nosníku by jí odpovídala ohybová tuhost EI . Druhým příspěvkem je pak součin FL , který závisí na osově síle a geometrii soustavy. V maticovém

zápisu úloh s více stupni volnosti první člen odpovídá konvenční matici tuhosti soustavy, druhý je obvykle označován jako *napěťová*, případně *geometrická* matice tuhosti. Ze vztahu (1.4) vyplývá, že celková tuhost v příčném směru roste s tahovou osovou silou ($F > 0$) a naopak klesá při tlakovém zatížení ($F < 0$). Při nulovém příčném zatížení Q vyplývá z (1.4)

$$(k_\varphi + FL)\varphi = 0. \quad (1.5)$$

a nenulové natočení φ je možné pouze tehdy, jestliže $k_\varphi + FL = 0$, což definuje kritickou osovou silou $F_{kr} = -k_\varphi/L$, při níž dochází ke ztrátě stability. V takovém případě nelze ovšem velikost φ z (1.5) jednoznačně určit. Uvedený postup tedy vede pouze na určení úrovně zatížení, při němž dochází ke ztrátě stability, neřeší ovšem následné deformačně-napěťové poměry.

Na uvedeném příkladu můžeme ilustrovat i energetickou interpretaci mezního stavu ztráty stability: při malých natočeních φ je osový posun konce pružiny roven $L\varphi^2/2$. Protože k němu dochází při konstantní síle osového předepnutí F (natočení φ je malé), je změna osové (membránové) energie napjatosti $FL\varphi^2/2$. Změna energie napjatosti akumulované v rotační pružině je rovna $k_\varphi\varphi^2/2$. Při nulovém příčném zatížení $Q = 0$ dochází v okamžiku ztráty stability k transformaci membránové energie napjatosti na ohybovou, jejich součet je nulový,

$$k_\varphi\varphi^2/2 + FL\varphi^2/2 = 0. \quad (1.6)$$

odkud vyplývá výše uvedená hodnota kritické síly $F_{kr} = -k_\varphi/L$.

10.2 Bifurkace, imperfekce a nelinearita v problémech stability

Využijeme nyní předchozího příkladu k jinému pohledu na chování soustavy při ztrátě stability. Uvažujme pouze osové zatížení v tlaku, které splňuje podmínku $|F| < |F_{kr}|$. Natočení φ je nulové, pokud nepůsobí síla Q . Příčné zatížení Q vyvolá sice při $|F| < |F_{kr}|$ nenulové natočení, které můžeme určit z (1.4), to se ovšem po odstranění Q vrátí na nulovou hodnotu dle vztahu (1.5). Přímý tvar s nulovým natočením tedy představuje stabilní geometrickou konfiguraci soustavy.

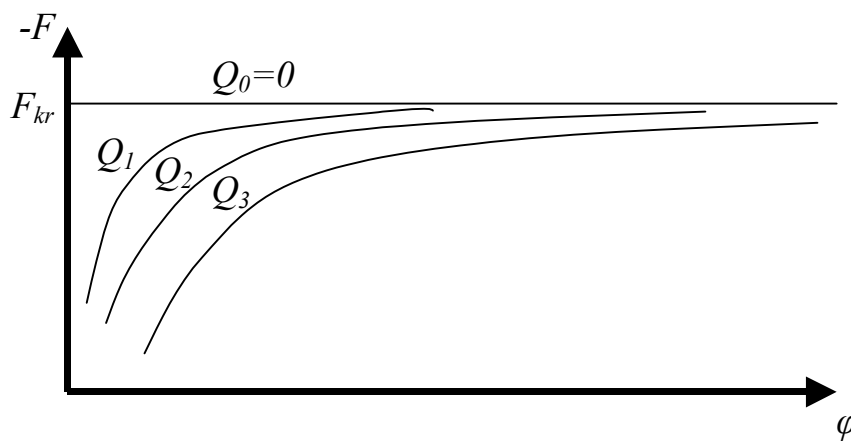
V okamžiku dosažení kritické osové síly se tento stav kvalitativně mění. Soustava sama sice zůstává v přímém směru, ale nepatrný impuls v příčném směru způsobí nevratnou změnu tvaru – přechod do nové stabilní geometrické konfigurace s nenulovým natočením φ . Vidíme tedy, že v okamžiku dosažení kritické síly jsou teoreticky možné dvě geometricky odlišné rovnovážné konfigurace – původní přímá, která se stává nestabilní, a nová vychýlená, stabilní. Proto se v takovém případě hovoří o *bifurkaci*, neboli rozdělení rovnováhy. Velikost natočení φ nelze ovšem z podmínky (1.5) určit, jak již bylo zmíněno, k tomu bychom museli opustit předpoklad malého úhlu φ a řešit geometricky nelineární problém velkých posuvů. Proto je na obr.2.1 případ bifurkace zobrazen vodorovnou přímkou, rovnoběžnou se souřadnou osou φ .

Uvažujme nyní případ, kdy je soustava nejprve zatížena malou příčnou silou Q , která způsobí počáteční natočení $\varphi = QL/k_\varphi$. Teprve poté zatížíme soustavu tlakovou osovou silou $F < 0$. Při postupném zvyšování tlakového zatížení bude vzrůstat i hodnota φ podle (1.4), při $F \rightarrow F_{kr}$ pak poroste nade všechny meze. Je zřejmé, že v tomto případě nedochází k bifurkaci, křivka zatížení-natočení je hladká bez zlomů a větvení. Velikost Q přitom hraje roli parametru, který rozhoduje, nakolik je tato hladká křivka vzdálena od bifurkačního chování. Na obr.2.1 jsou uvedeny tři takové závislosti pro $Q_1 < Q_2 < Q_3$.

Máme tedy před sebou dvě kvalitativně odlišné situace:

- v prvním případě předpokládáme ideální tvar, vazby, materiál i zatížení, které zajistí dokonale osové (membránové) zatěžování až do okamžiku ztráty stability. Příčné zatížení hraje jen roli následného rušivého impulsu, který nám umožní diskutovat problém stability – bifurkace.
- ve druhém případě působí příčné zatížení Q od počátku a lze na něj pohlížet jako na imperfekci, nepřesnost, která odlišuje ideální případ osového zatěžování od reálných úloh, kde se vždy vyskytují nepřesnosti. Ty se mohou týkat jak zatížení, tak geometrie, vazeb, či materiálu. Vždy však způsobují kvalitativní změnu odezvy: místo bifurkačního chování je závislost mezi zatížením a deformací popsána jedinou hladkou křivkou jako nelineární problém a napjatost má od samého počátku nejen membránové, ale i ohybové složky.

Uvedeným dvěma případy odpovídají i různé algoritmy řešení stabilitních problémů pomocí MKP, jak bude podrobně rozebráno ve 3. kapitole.

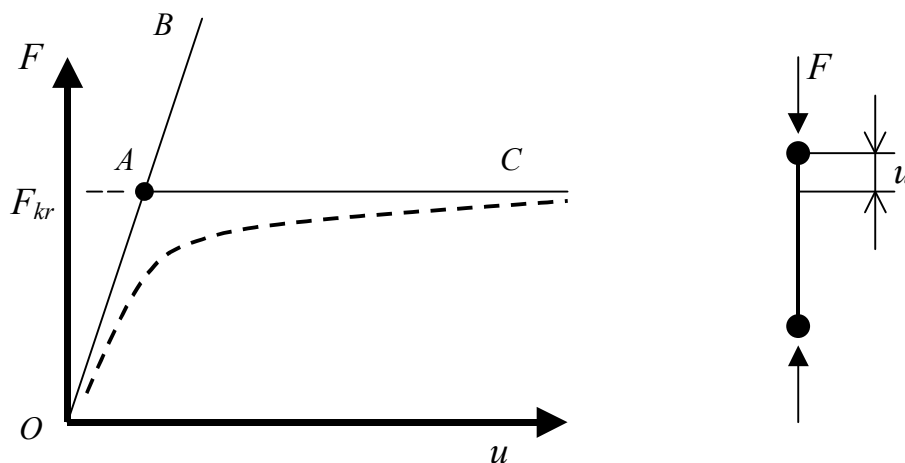


Obr.2.1 Závislost F - φ při působící příčné síle Q ($Q_0 < Q_1 < Q_2 < Q_3$)

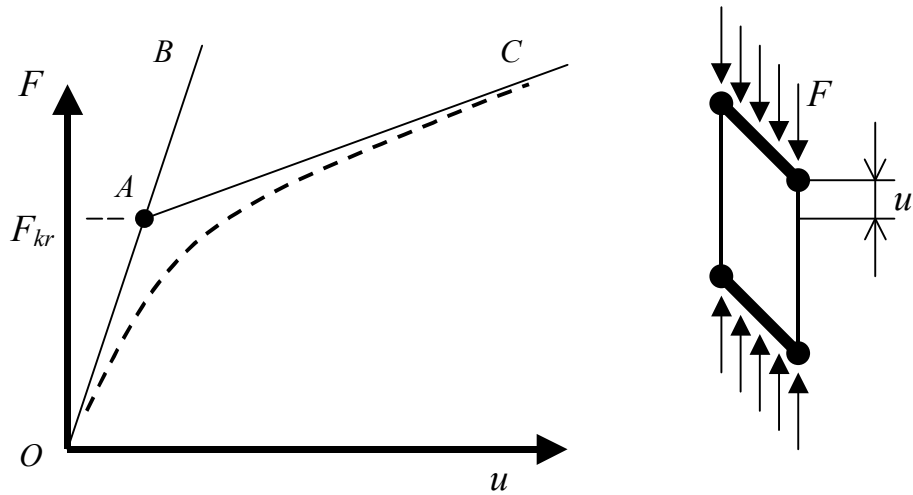
Ukažme ještě závislost mezi osovým zatížením F a osovým posuvem působiště síly u na obr.2.2, kde vynikne náhlý zlom zatěžovacího diagramu v bifurkačním bodě A . Stabilní větev OA pokračuje za bifurkačním bodem A se stejnou směrnici dále (AB), v tomto úseku se však již jedná o nestabilní zatěžovací dráhu. Nová, sekundární zatěžovací dráha AC má směrnici jinou. Při přetěžování za bifurkačním bodem se vždy realizuje zatěžování po sekundární větvi, která je nyní větvi stabilní, neboť představuje menší odpor konstrukce vůči zatížení. Směrnice sekundární větve za bifurkačním bodem je rozhodující pro charakter rovnováhy a pro chování konstrukce po dosažení bifurkace. Na obr.2.2-2.4 jsou postupně příklady neutrálního, stabilního a nestabilního chování za bifurkačním bodem, charakterizované nulovou, pozitivní a negativní směrnici sekundární větve. První případ reprezentuje chování ideálního přímého prutu s osovým zatížením, druhý představuje rovinnou stěnu a třetí válcovou skořepinu vystavenou osovému zatížení. Pozitivní směrnice sekundární větve zatěžovacího diagramu u rovinné stěny charakterizuje konstrukci, která je schopna přenášet zatížení větší než kritické bez kolapsu – i po vybočení a boulení je nutno k dalšímu nárůstu deformace nutno zvyšovat zatížení. Negativní směrnice sekundární větve naopak charakterizuje konstrukce, u kterých hrozí v okamžiku bifurkace náhlé zhroutilí, ztráta únosnosti. V anglické terminologii se

používá termínu snap-through, který bychom nejspíše mohli přeložit jako “zborcení”. Kromě zmíněného případu axiálně zatížené válcové skořepiny je typický i pro nízko klenuté oblouky s velkým rozpětím či ploché skořepinové vrchlíky dle obr.2.5. Ilustrace takového chování v animované podobě je uvedena [zde](#), podrobný komentář k tomuto příkladu je v kap.3.3.

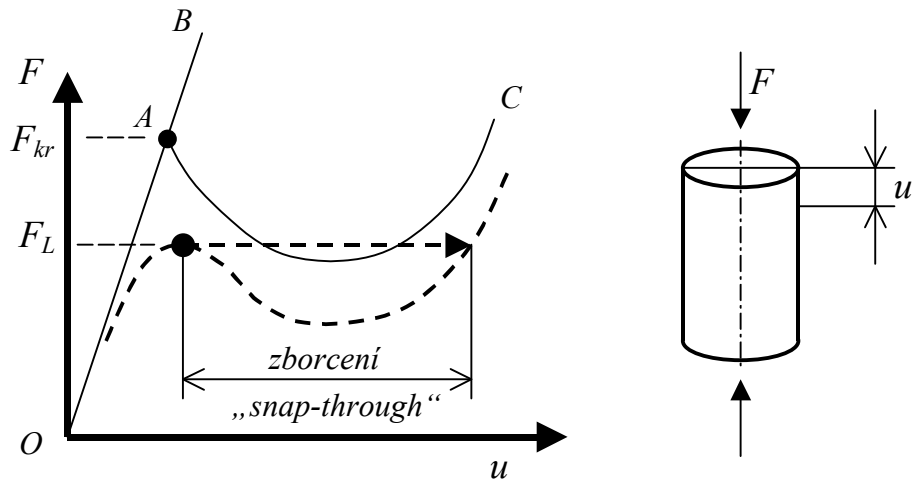
Reálné struktury vykazují imperfekce, které, jak bylo zmíněno, vylučují bifurkační chování a jejichž zatěžovací diagram je na obr. 2.2-2.4 vyznačen čárkovanou křivkou. Její vzdálenost od bifurkačního diagramu je závislá na velikosti imperfekcí a může se případ od případu lišit. U konstrukcí dle obr.2.4 lze na skutečné zatěžovací křivce nalézt tzv. limitní zatížení F_L , odpovídající lokálnímu maximu na křivce $F-u$. Hodnota skutečného limitního zatížení může být několikanásobně menší, než teoretické kritické zatížení F_{kr} , odpovídající bifurkačnímu chování. Po dosažení F_L nastává při stálé hodnotě zatěžující síly zhroucení konstrukce – náhlý dynamický přechod do nového stabilního stavu. Ten je reprezentován na zatěžovacím diagramu přeskokem přes lokální minimum na stoupající část zatěžovací křivky (obr.2.4), v realitě pak velkými deformacemi, které se neobejdou bez rozsáhlých plastických deformací, případně poruch materiálu. To je patrné na experimentech s osovým zatěžováním plechovek. [První](#) ukazuje náhlé vybočení zhruba v polovině výšky stěny, [druhý](#) pak postupné „skládání“ stěny od spodní podstavy. (Pozn.: při problémech se spuštěním animací je nutno instalovat software ze složky „decode“). Je zřejmé, že na charakter borcení má dominantní vliv počáteční rozložení imperfekcí. Děj probíhá pomalu proto, že zatížení v uvedených případech bylo řízeno deformačně. To umožnilo i podrobně zaznamenat průběh osově síly na dalších animacích ([případ 1](#), [případ 2](#)). Jsou zde paralelně zachyceny změny geometrie zatížené konstrukce spolu s aktuální hodnotou osově síly na diagramu v levé části obrazovky – viz též obr.2.6-2.11. Je vidět, že skutečný průběh síly neopisuje idealizovanou hladkou křivku jako na obr. 2.4, ale je rozkmitán množstvím následných lokálních minim a maxim, která odpovídají jednotlivým etapám borcení. Základní charakter průběhu síly však souhlasí s obr. 2.4.



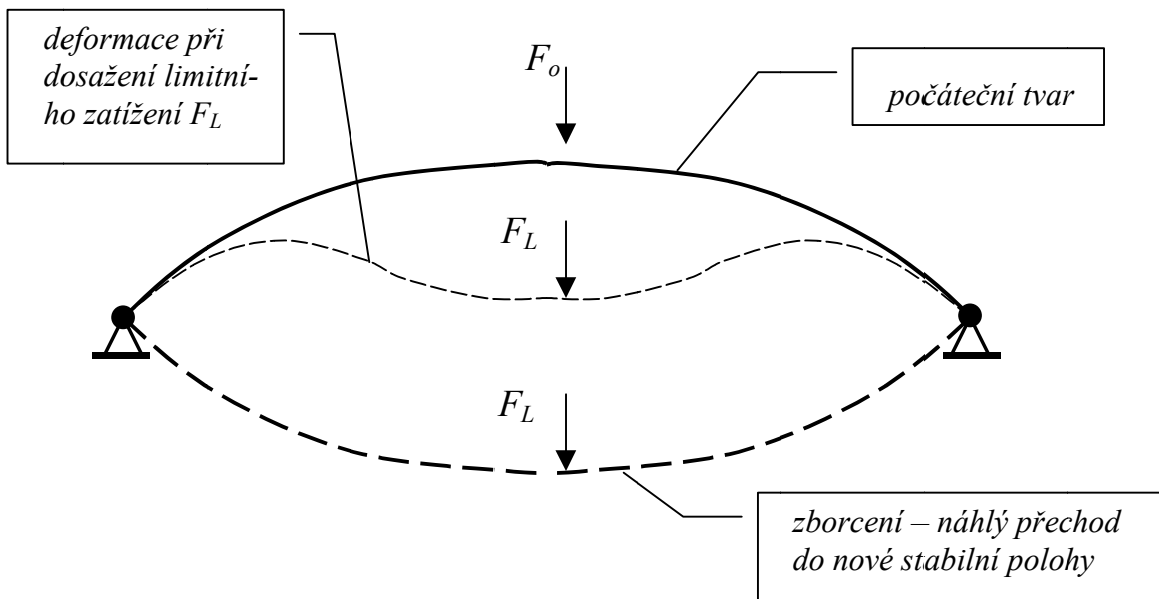
Obr.2.2 Závislost $F-u$ při neutrální směrnicí sekundární větve AC. Příklad: přímý prut, čárkovaně vyznačeno chování reálné konstrukce s imperfekcemi



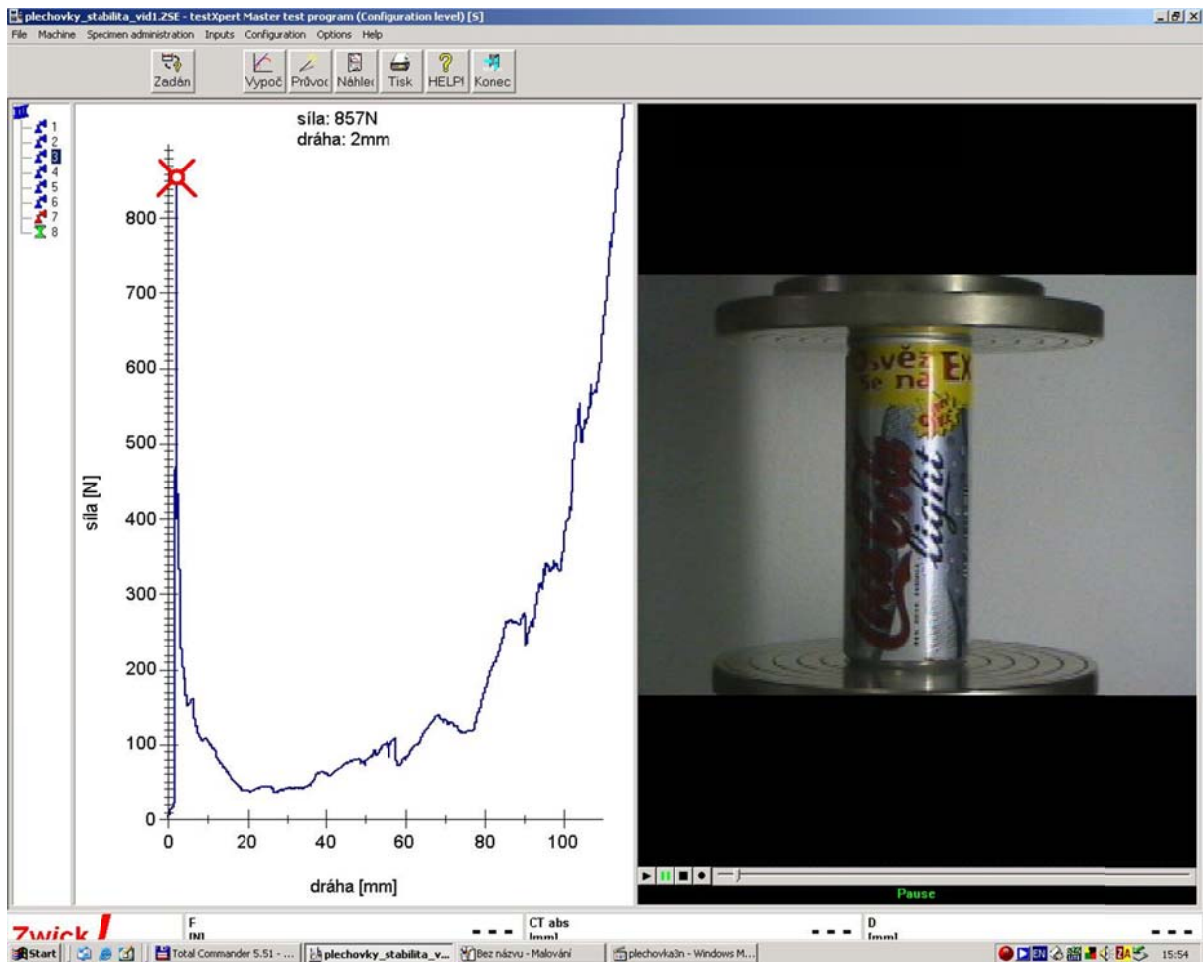
Obr.2.3 Závislost $F-u$ při pozitivní směrnicí sekundární větve AC. Příklad: tlačena stěna, čárkovaně vyznačeno chování reálné konstrukce s imperfekcemi



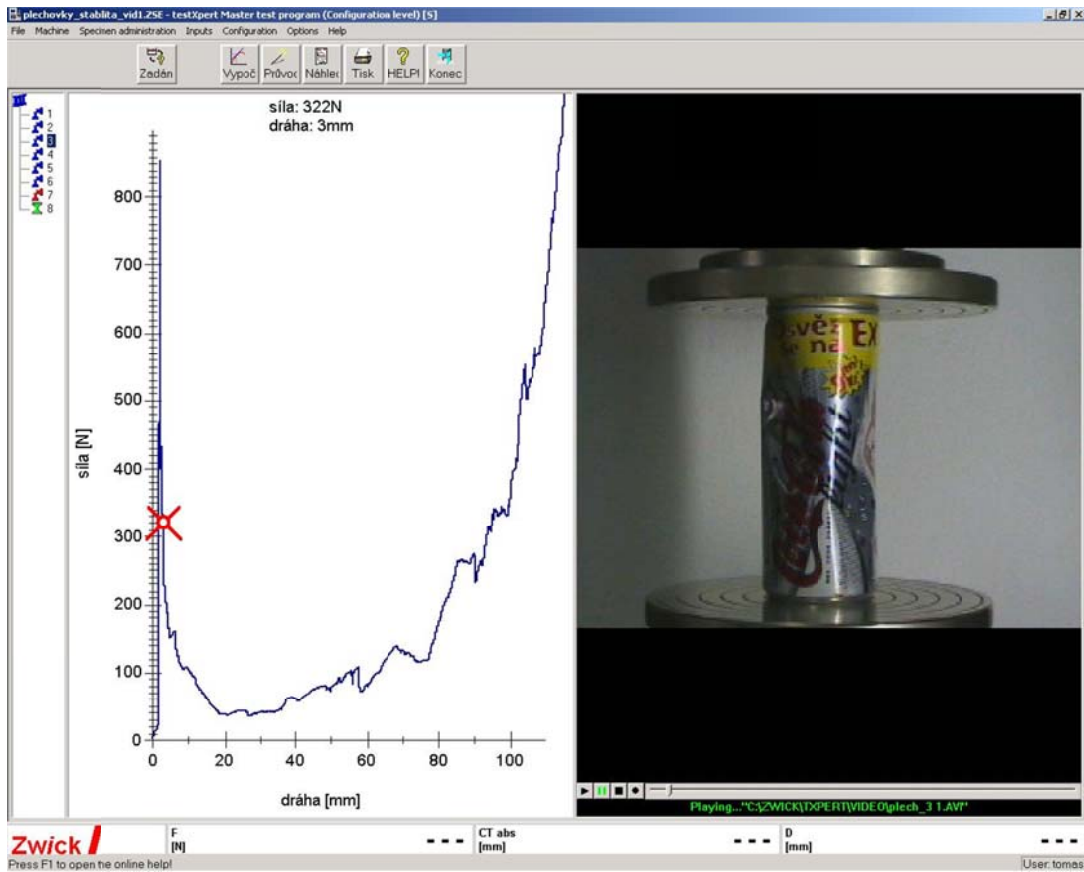
Obr.2.4 Závislost $F-u$ při negativní směrnicí sekundární větve AC. Příklad: axiálně zatížená válcová skořepina, čárkovaně vyznačeno chování reálné konstrukce s imperfekcemi



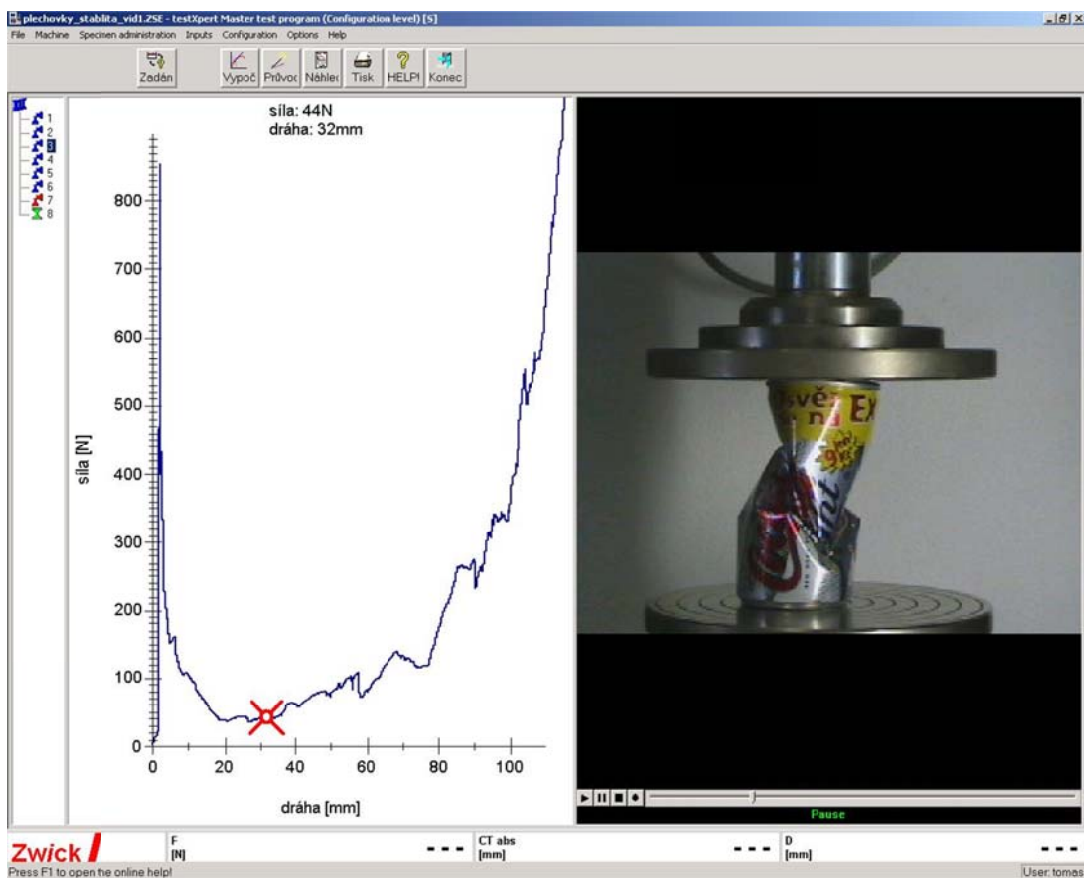
Obr.2.5 Předepnutá listová pružina - typický příklad chování, označovaného jako “snap-through” – dynamického přechodu do nové stabilní polohy dle diagramu na obr.2.4



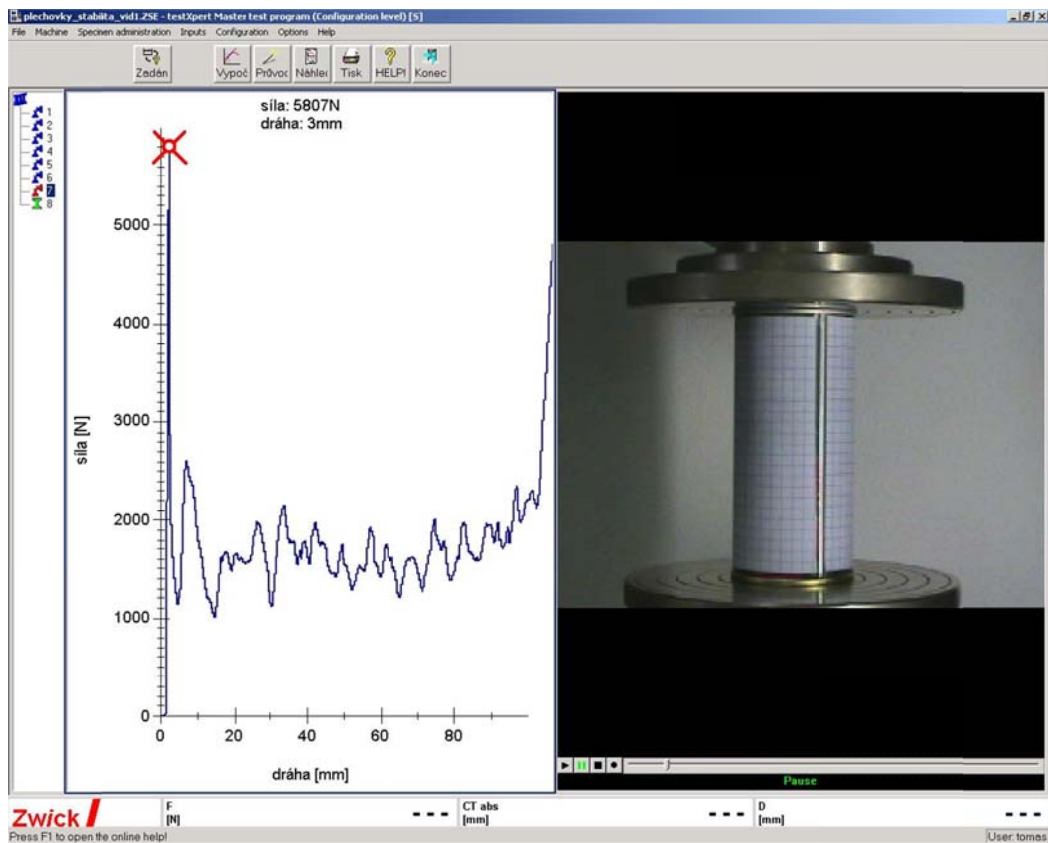
Obr. 2.6 Experiment - případ 1 – limitní hodnota osové síly $F_L = 857$ N



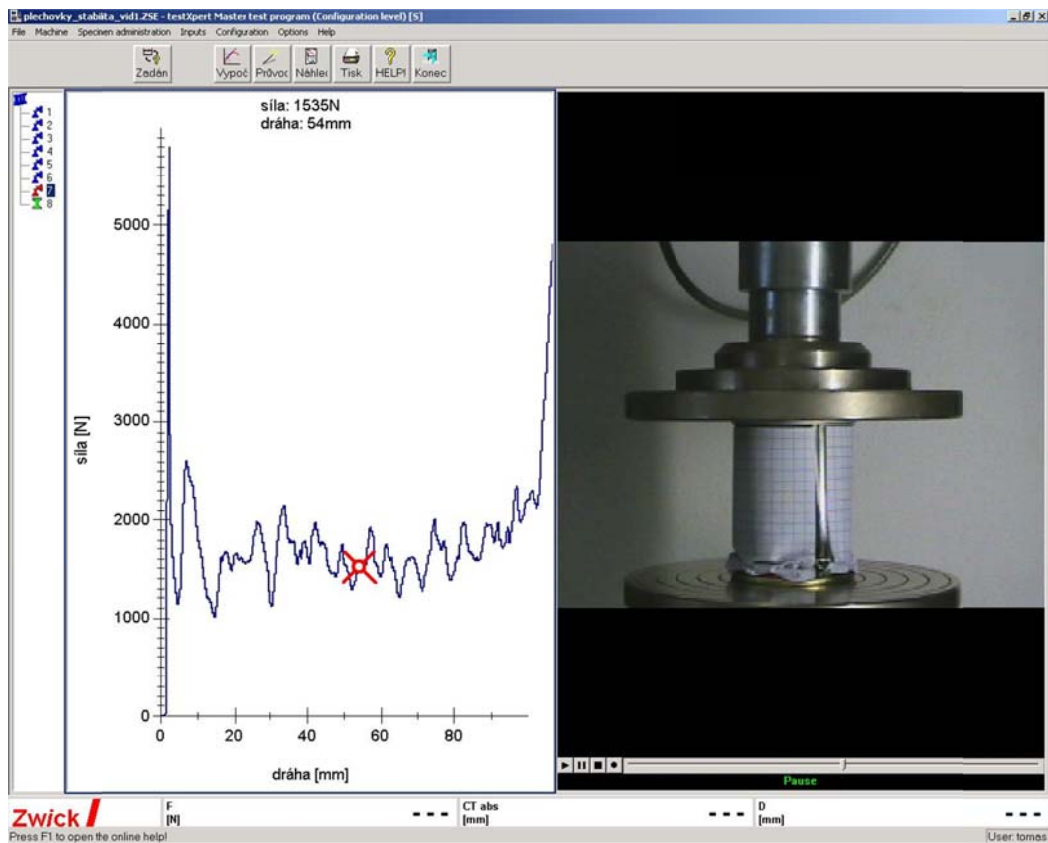
Obr. 2.7 Experiment - případ 1 – pokles osové síly na počátku boulení



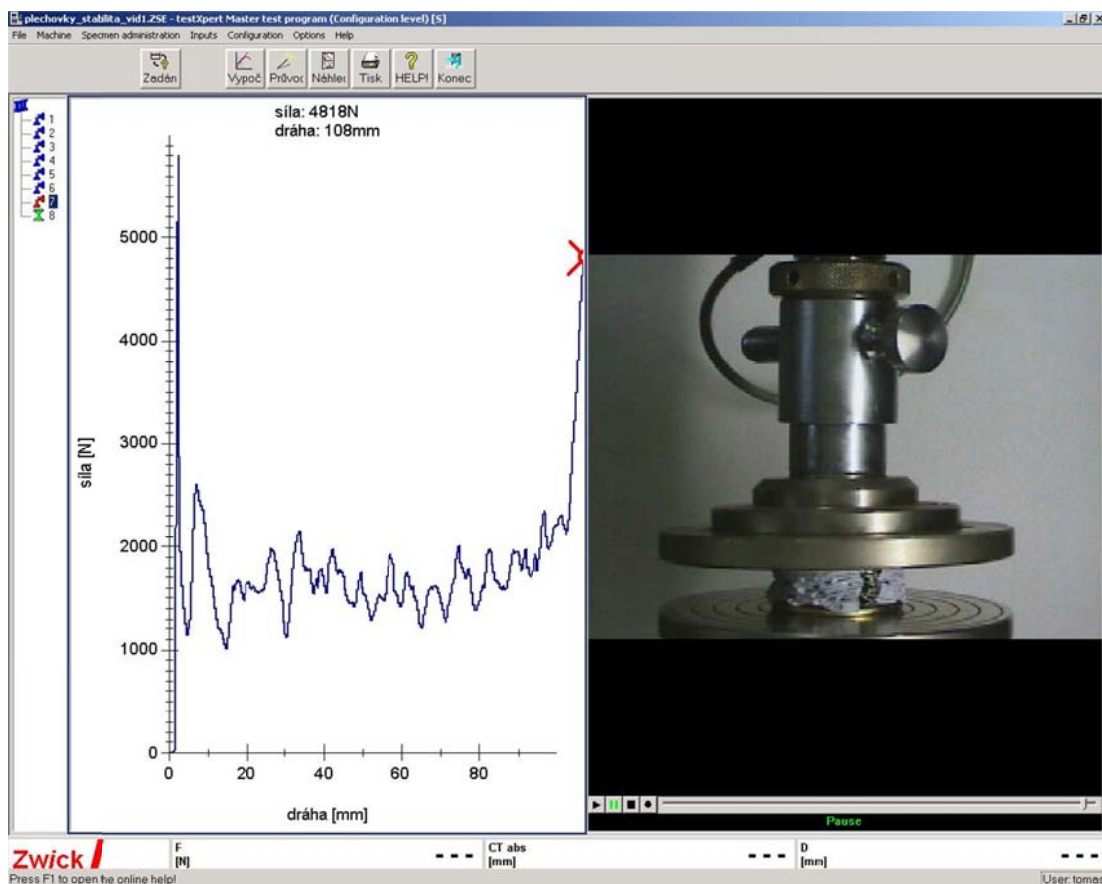
Obr. 2.8 Experiment - případ 1 – deformace při minimální hodnotě osové síly



Obr. 2.9 Experiment - případ 2 – limitní hodnota osové síly $F_L = 5807$ N



Obr. 2.10 Experiment – příp.2 – lokální ztráta stability iniciovaná imperfekcí u dolního lemu



Obr. 2.11 Experiment - případ 2 – úplné zborcení stěny

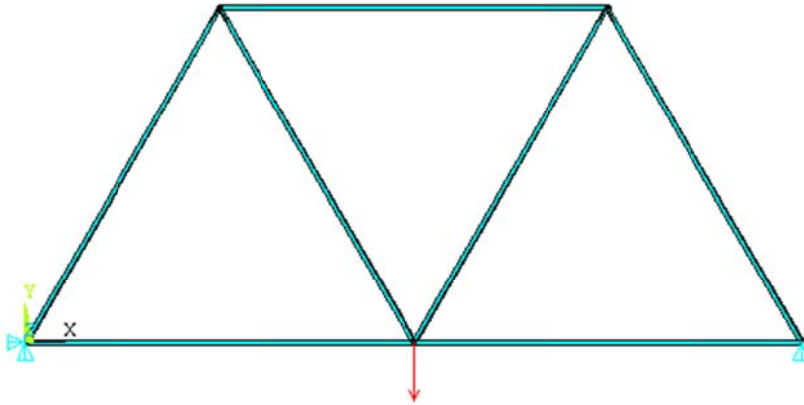
10.3 Řešení stability pomocí MKP

Z hlediska výpočtové analýzy představují stabilitní problémy velmi problematické mezní stavy, které mohou být méně zkušeným uživatelem využívajícím komerční programové systémy MKP snadno přehlédnuty. Standardní analýza napjatosti a deformace tenkostěnné konstrukce, vedoucí na řešení základní rovnice lineární statické úlohy $\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}$, totiž problémy se stabilitou nedokáže odhalit. Je pouze na uživateli, aby tyto mezní stavy předvídal a odpovídající stabilitní problém v odůvodněných případech formuloval a zadal k řešení.

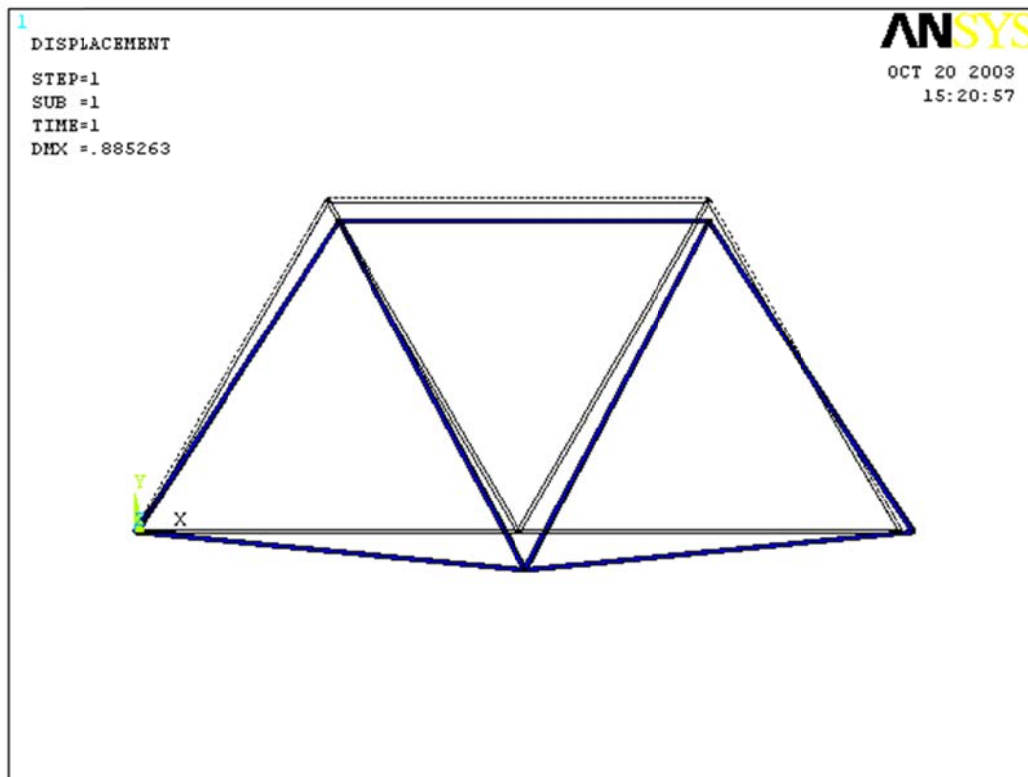
Jako ilustraci nebezpečí závažného opomenutí při nekritickém hodnocení výsledků standardní napětově-deformační analýzy uvedeme nyní jednoduchý příklad příhradové konstrukce dle obr.3.1 – viz [příklad 3.1](#). Jak se lze snadno přesvědčit, některé z prutů této konstrukce jsou při zadaném zatížení vystaveny osové tlakové síle, která je větší, než kritická síla na mezi vzpěrné stability. Úplné numerické řešení daného problému včetně zahrnutí stability je uvedeno v [příkladu 3.2](#). Kvalitativní rozdíl výsledků je patrný ze srovnání obr.3.2a a 3.2b. Znovu je třeba zdůraznit to, že neadekvátnost lineární analýzy v uvedených souvislostech výpočtový program žádným způsobem nesignalizuje. Odtud plyne nebezpečí závažných chyb numerických analýz tím spíše, že stabilitní problémy nemusí být vždy tak zřetelné, jako v uvedeném ilustrativním případě. Mohou se například týkat jen určitých podoblastí řešené konstrukce, jejichž lokalizace nemusí být apriorně zřejmá.

U
F

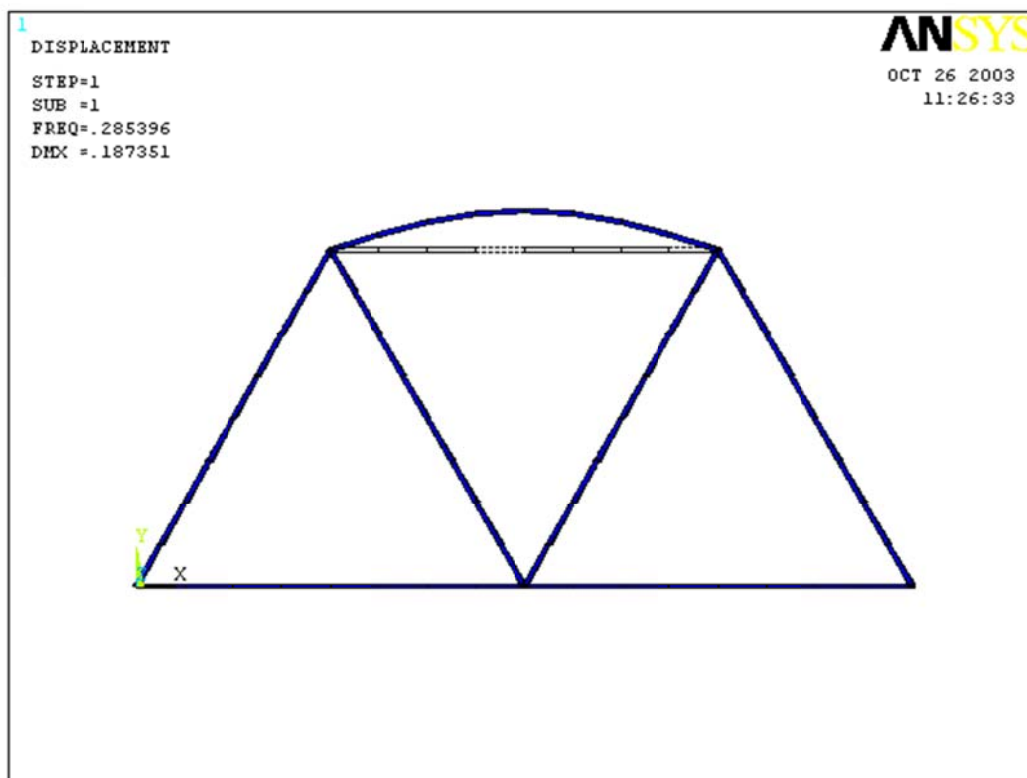
ANSYS



Obr.3.1 Příhradová konstrukce – vazby a zatížení



Obr.3.2a Příhradová konstrukce – lineární analýza deformací



Obr.3.2b Příhradová konstrukce - deformace při ztrátě stability

Všechny rozsáhlejší systémy MKP nabízejí prostředky k řešení stabilitních problémů, a to zpravidla dvěma odlišnými typy algoritmů. V anglické terminologii manuálů výpočtových systémů jsou pro ně používány termíny „linear buckling“ a „nonlinear buckling“.

V prvním případě „lineární“ ztráty stability nám stabilitní analýza umožňuje numericky určit kritické zatížení, při kterém dochází k bifurkaci – rozdělení rovnováhy – tenkostěnné konstrukce, zatížené až do okamžiku ztráty stability pouze membránovými (osovými) složkami napětí. Určí rovněž charakteristický tvar vybočení střednicové plochy, k němuž při ztrátě stability dojde. Praktické použití této varianty stabilitní analýzy je omezeno jen na ideální geometrické tvary bez imperfekcí, u nichž nedochází před okamžikem bifurkace k ohybovému namáhání, jako např. u Eulerova vzpěru přímých prutů. Přívlastek „lineární“ u této analýzy vyjadřuje skutečnost, že až do okamžiku bifurkace je úloha lineární a k (nelineární) ztrátě stability dojde náhlým kvalitativním skokem. V některých případech může lineární stabilitní analýza posloužit jako orientační předstupeň před následující plně nelineární analýzou.

Geometrie a zatížení reálných tenkostěnných konstrukcí jsou často takové, že jednotlivé prvky konstrukce jsou od samého počátku namáhány kromě membránových napětí i ohybem. Únosnost takové konstrukce nelze potom posuzovat z výsledků lineární stabilitní analýzy dle předchozího odstavce, neboť k bifurkaci nedochází. Křivka zatížení-deformace je hladká, nedochází k jejímu větvení, je ovšem od počátku nelineární. Jediná možnost, jak spolehlivě numericky řešit takové případy, je uskutečnit plně nelineární řešení s postupnými přírůstky

zátížení. Učebnicovým příkladem problémů, vhodných k řešení jednotlivými zmíněnými algoritmy je srovnání Eulerova vzpěru přímého prutu (lineární stabilita) na jedné straně s tlačným prutem s počáteční křivostí (nelineární stabilita) na straně druhé. Ukažme v následujících odstavcích na příkladech možnosti obou přístupů.

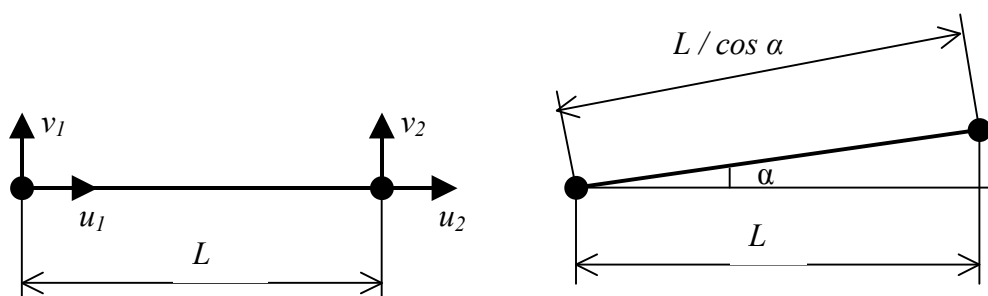
Geometrická matice k_σ a její sestavení

Při vybočení tenkostěnné konstrukce dochází k přeměně akumulované energie membránové napjatosti v energii ohybové napjatosti. Tento proces je vzhledem k řádovým rozdílům mezi membránovou a ohybovou tuhostí tenkostěnných konstrukcí spojen s velkými průhyby střednicové plochy. K numerické analýze tohoto jevu je třeba sestavit matici, která je schopna popsat vliv membránové napjatosti na celkovou energetickou bilanci při vybočení střednice. Tuto matici budeme označovat k_σ pro prvek, resp. K_σ pro celou konstrukci. Obvykle se nazývá geometrická, nebo též napěťová matice tuhosti. Uvedené názvy zdůrazňují skutečnost, že matice nezávisí na materiálových vlastnostech, nýbrž na geometrii a aktuálním stavu napjatosti. Matice k_σ se kromě stabilitní analýzy využívá i při plně nelineárním přírůstkovém řešení, kde například zabezpečuje, že příčně zatížený nosník se při současném působení osového tahu prohýbá méně než při osovému tlaku.

Výchozím bodem při sestavování napěťové matice tuhosti je zahrnutí nelineárních členů do geometrických vztahů mezi posuvy a složkami přetvoření. Kvůli názornosti výkladu předvedeme nejprve explicitní tvar matice k_σ pro nejjednodušší prvek, přenášející pouze osové síly a napětí.

Nejjednodušší prutový prvek

Aby bylo možné popsat vybočení našeho [prutového prvku](#), je třeba rozšířit jeho deformační parametry o vertikální posuvy v_1, v_2 dle obr.3.3.



Obr.3.3 Prutový prvek – stabilitní analýza

Prutový prvek se může axiálně deformovat, zůstává však stále přímý. Osové přetvoření je

$$\varepsilon = \varepsilon_u + \varepsilon_v, \quad \text{kde} \quad \varepsilon_u = \frac{u_2 - u_1}{L}, \quad \varepsilon_v = \frac{1}{2} \left(\frac{v_2 - v_1}{L} \right)^2. \quad (3.1)$$

Složka ε_v byla získána z $\varepsilon_v = \Delta L / L$, přitom ΔL je zvětšení délky prvku, související s rotací prvku o malý úhel α bez vodorovného posuvu koncových bodů. Výsledný vztah pro ε_v byl získán použitím prvních dvou členů secantové řady ve výrazu

$$\Delta L = \frac{L}{\cos \alpha} - L = L(\sec \alpha - 1) = L \frac{\alpha^2}{2} = \frac{L}{2} \left(\frac{v_2 - v_1}{L} \right)^2. \quad (3.2)$$

Energie napjatosti prvku je $W = E.S.L.\varepsilon^2/2$. Odtud

$$W = E.S.L. (\varepsilon_u^2/2 + \varepsilon_u \varepsilon_v + \varepsilon_v^2/2) = E.S.L. (\varepsilon_u^2 + \varepsilon_v^2) / 2 + F.L \varepsilon_v, \quad (3.3)$$

kde součin $E.S.\varepsilon_u$ byl interpretován jako osová síla F (kladná v případě tahu). Při lineární interpolaci posuvů je možno složky přetvoření vyjádřit v závislosti na deformačních parametrech

$$\varepsilon_u = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_v = \frac{1}{2L^2} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

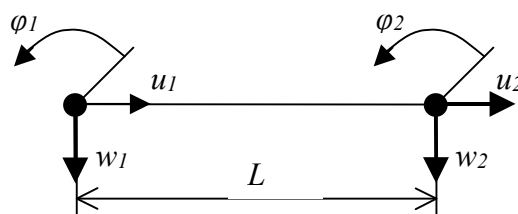
Výrazy ε_u^2 a ε_v jsou kvadratickou funkcí deformačních parametrů, výraz ε_v^2 je funkcí 4.stupně a je možno ho oproti předešlým zanedbat. Celkovou energii napjatosti prvku tak dostaneme pro $\delta = [u_1, v_1, u_2, v_2]^T$ ve tvaru

$$W = \frac{1}{2} \delta^T \left(\frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{F}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \delta \quad (3.6)$$

První z matic je standardní maticí tuhosti prutového prvku dle [vztahu \(3.18\)](#). Druhá matice je hledaná napěťová matice tuhosti \mathbf{k}_σ , závislá na geometrii a aktuální hodnotě osového zatížení F . Protože k sestavení \mathbf{k}_σ vždy potřebujeme osovou sílu, resp. membránové složky napětí, musí být stabilitnímu i plně nelineárnímu výpočtu vždy předřazen jako první krok alespoň malý lineární přírůstek, poskytující počáteční hodnoty pro sestavení napěťové matice tuhosti. Celkovou maticí \mathbf{K}_σ sestavíme z prvkových matic \mathbf{k}_σ stejným postupem, jaký je použit pro standardní maticí tuhosti \mathbf{K} .

Nosníkový prvek

Uvažujme [nosníkový prvek](#) dle obr.3.4, umožňující kromě ohybu i přenos osového zatížení.



Obr.3.4 Nosníkový prvek

Přetvoření ve vzdálenosti z od neutrální osy má velikost

$$\varepsilon_x = u_{,x} - zw_{,xx} + \frac{w_{,x}^2}{2}, \quad (3.7)$$

kde první člen pravé strany představuje přetvoření od osového tahu, druhý člen je způsoben ohybem a třetí člen odpovídá přetvoření ε_v z rovnice (3.1), ovšem psanému pro element délky prutu dx . Čárka v poli indexů zde představuje parciální derivaci podle příslušné následující souřadnice, dvojí index za čárkou druhou derivaci atd. energii napjatosti prvku pak můžeme psát jako

$$W = \int_0^L \int_S \frac{1}{2} E \varepsilon_x^2 dS dx. \quad (3.8)$$

Po dosazení z rovnice (3.7), úpravách

$$S = \int_S dS, \quad 0 = \int_S z dS, \quad I = \int_S z^2 dS, \quad F = \int_S E u_{,x} dS, \quad (3.9)$$

kde F je osová tahová síla, a po zanedbání členu vyššího řádu $w_{,xx}^4$ získáme energii napjatosti ve tvaru

$$W = \int_0^L \frac{ES}{2} u_{,x}^2 dx + \int_0^L \frac{EI}{2} w_{,xx}^2 dx + \int_0^L \frac{F}{2} w_{,x}^2 dx. \quad (3.10)$$

První člen vede na standardní matici tuhosti [osově namáhaného prvku](#), druhý na matici [nosníkového prvku](#). Třetí integrál vyjadřuje energii akumulovanou v elementu prutu o délce dx , který se při působení osově síly F pootočí o úhel $w_{,x}$. Z tohoto příspěvku obdržíme napěťovou matici tuhosti nosníkového prvku. Pokud použijeme stejného označení veličin jako při odvození [standardní matice tuhosti](#) a dále označíme

$$w_{,x} = \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\delta}, \quad (3.11)$$

můžeme při nahrazení $w_{,x}^2 = w_{,x}^T w_{,x}$ třetí výraz v rovnici (3.10) zapsat jako

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{k}_\sigma \boldsymbol{\delta} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T \int_0^L \mathbf{G}^T F \mathbf{G} dx \boldsymbol{\delta}, \quad (3.12)$$

kde explicitní tvar napěťové matice tuhosti je [6]

$$\mathbf{k}_\sigma = \frac{F}{30L} \begin{vmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ & 4L^2 & -3L & L^2 \\ & & 36 & -3L \\ \text{Sym.} & & & 4L^2 \end{vmatrix}. \quad (3.13)$$

Obecná formulace matice \mathbf{k}_σ

V předchozích odstavcích jsme odvodili matici \mathbf{k}_σ pro dva speciální případy prvků, namáhaných pouze tahem/tlakem v prvním případě a s uvažováním ohybu v případě druhém. Tento postup je pro komplikovanější případy vždy spojen s pochybnostmi, zda jsme při odvození neopomněli některý z důležitých příspěvků. Ukážeme proto nyní obecný přístup,

který sice postrádá názornost předchozích postupů, ale z něhož můžeme všechny dílčí případy získat dodatečným vypuštěním všech nadbytečných členů.

Jak jsme si již ověřili, pro sestavení napěťové matice tuhosti je důležité zahrnutí nelineárních členů do geometrických vztahů. V obecném případě, s využitím sumačního pravidla pro opakující se indexy, můžeme tyto vztahy zapsat ve tvaru

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}), \quad (3.14)$$

který definuje tzv. Greenův-Lagrangeův tenzor velkých přetvoření [4]-[6]. Jak je zřejmé, první dva členy představují lineární část geometrických vztahů – obvyklý inženýrský tenzor přetvoření, poslední příspěvek je pak nelineární, který v případě malých deformací zanedbáváme. Po rozepsání obvyklou notací pružnosti má např. složka ε_x dle (3.14) tvar

$$\varepsilon_x = u_{,x} + (u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2) / 2, \quad (3.15)$$

$$\text{a zkos} \quad \gamma_{xy} = u_{,x} + v_{,y} + (u_{,x} u_{,y} + v_{,x} v_{,y} + w_{,x} w_{,y}) / 2. \quad (3.16)$$

Jestliže uvažujeme obvyklou aproximaci posuvů v MKP

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\delta}, \quad (3.17)$$

kde bázové funkce v matici \mathbf{N} i deformační parametry $\boldsymbol{\delta}$ závisejí na konkrétním typu prvku (viz např. [prostorový čtyřstěn](#)), musíme pro sestavení nelineární části tenzoru přetvoření zavést další matice. Je to nejprve matice \mathbf{h} , obsahující parciální derivace složek posuvů

$$\mathbf{h} = [u_{,x} \ u_{,y} \ u_{,z} \ v_{,x} \ v_{,y} \ v_{,z} \ w_{,x} \ w_{,y} \ w_{,z}]^T, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\delta}, \quad (3.19)$$

kde \mathbf{G} je matice vzniklá parciálními derivacemi bázových funkcí \mathbf{N} . Dále definujeme matici

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} u_{,x} & 0 & 0 & v_{,x} & 0 & 0 & w_{,x} & 0 & 0 \\ 0 & u_{,y} & 0 & 0 & v_{,y} & 0 & 0 & w_{,y} & 0 \\ 0 & 0 & u_{,z} & 0 & 0 & v_{,z} & 0 & 0 & w_{,z} \\ u_{,y} & u_{,x} & 0 & v_{,y} & v_{,x} & 0 & w_{,y} & w_{,x} & 0 \\ 0 & u_{,z} & u_{,y} & 0 & v_{,z} & v_{,y} & 0 & w_{,z} & w_{,y} \\ u_{,z} & 0 & u_{,x} & v_{,z} & 0 & v_{,x} & w_{,z} & 0 & w_{,x} \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

S pomocí nově zavedených matic nyní můžeme vyjádřit nelineární část tenzoru přetvoření jako

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{NL} = \frac{1}{2} \mathbf{Q} \mathbf{G} \boldsymbol{\delta}. \quad (3.21)$$

Práce nelineární složky tenzoru přetvoření na konstantních membránových složkách napětí

$$\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}] \quad (3.22)$$

je rovna

$$W = \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_{NL}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T \int_V \mathbf{G}^T \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T \int_V \mathbf{G}^T \mathbf{S} \mathbf{G} dV \boldsymbol{\delta} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{k}_\sigma \boldsymbol{\delta}. \quad (3.23)$$

Při této úpravě byla použita na první pohled ne zcela zřejmá rovnost

$$\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} \mathbf{G} \boldsymbol{\delta}, \text{ kde } \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{s} \end{bmatrix}, \mathbf{s} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Jak je patrné ze vztahu (3.23), napěťová matice $\mathbf{k}_\sigma = \int_V \mathbf{G}^T \mathbf{S} \mathbf{G} dV$ je symetrická, závisí na dosažené úrovni membránové napjatosti \mathbf{S} a nelineární části tenzoru přetvoření, vyjádřené pomocí \mathbf{G} .

Řešení lineární stability jako zobecněného vlastního problému

Odvozenou prvkovou matici \mathbf{k}_σ použijeme k sestavení globální napěťové matice \mathbf{K}_σ , které probíhá sumací všech prvkových příspěvků podle stejného algoritmu, jako u ostatních globálních matic MKP. K základní rovnici pro určení kritického zatížení při ztrátě stability nyní můžeme dojít následující úvahou: jestliže až do okamžiku ztráty stability je problém lineární, pak se nemění charakter rozložení membránových napětí, ale pouze jejich velikost. Matici \mathbf{K}_σ můžeme proto sestavit pro libovolně zvolené referenční zatížení \mathbf{F}_0 . Při λ -násobku působícího zatížení bude i napěťová matice tuhosti rovna $\lambda \cdot \mathbf{K}_\sigma$. Otázkou nyní je, při jaké velikosti zatížení dojde k situaci, v níž mohou existovat dva rozdílné rovnovážné stavy deformace, dané dvěma různými maticemi posuvů \mathbf{U} a $\mathbf{U} + \bar{\mathbf{U}}$. Pro oba stavy musí platit podmínky rovnováhy:

$$(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}_\sigma) \cdot \mathbf{U} = \lambda \mathbf{F}_0 \quad (3.25)$$

$$(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}_\sigma) \cdot (\mathbf{U} + \bar{\mathbf{U}}) = \lambda \mathbf{F}_0 \quad (3.26)$$

Odečtením první rovnice od druhé získáme rovnici zobecněného vlastního problému

$$(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}_\sigma) \cdot \bar{\mathbf{U}} = \mathbf{0} \quad (3.27)$$

pro určení skalárního multiplikátoru λ referenčního zatížení \mathbf{F}_0 . Zpravidla nás zajímá nejnižší vlastní číslo λ_1 , umožňující stanovit nejmenší kritické zatížení $\mathbf{F}_1 = \lambda_1 \cdot \mathbf{F}_0$. Jemu odpovídá vlastní tvar $\bar{\mathbf{U}}_1$, který představuje charakter vybočení při ztrátě stability, nikoli jeho velikost.

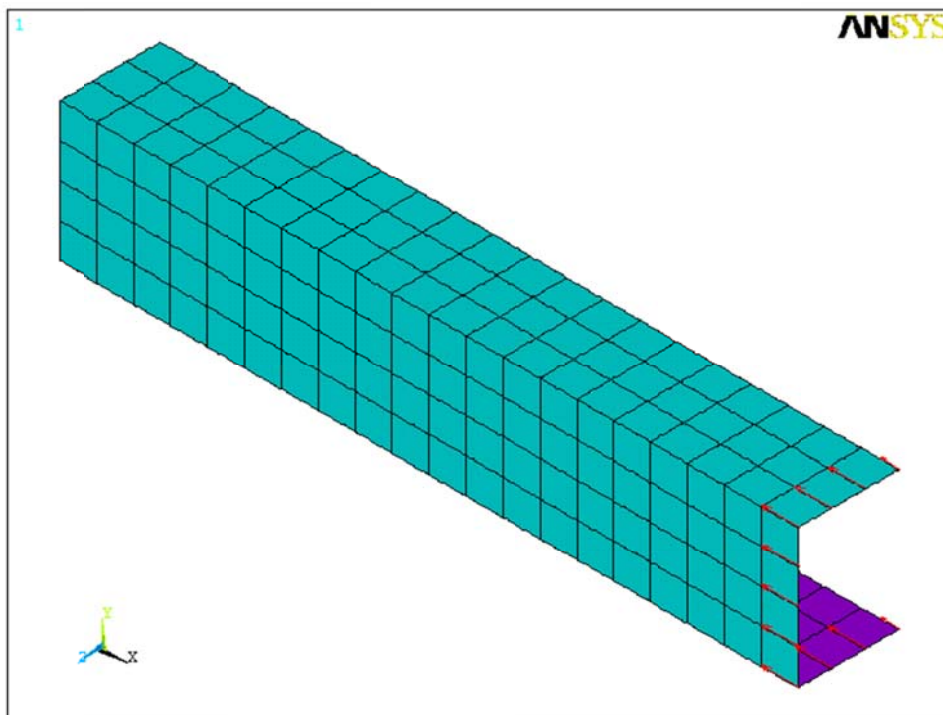
Praktické řešení problému lineární stability tedy zahrnuje vždy dva kroky:

1. Pro zvolené referenční zatížení je nutno spustit lineární výpočet, umožňující stanovit membránovou napjatost a z ní sestavit matici \mathbf{K}_σ .
2. Sestavení a řešení rovnice (3.27) ve druhém kroku probíhá některým ze známých numerických algoritmů na řešení vlastního problému [9].

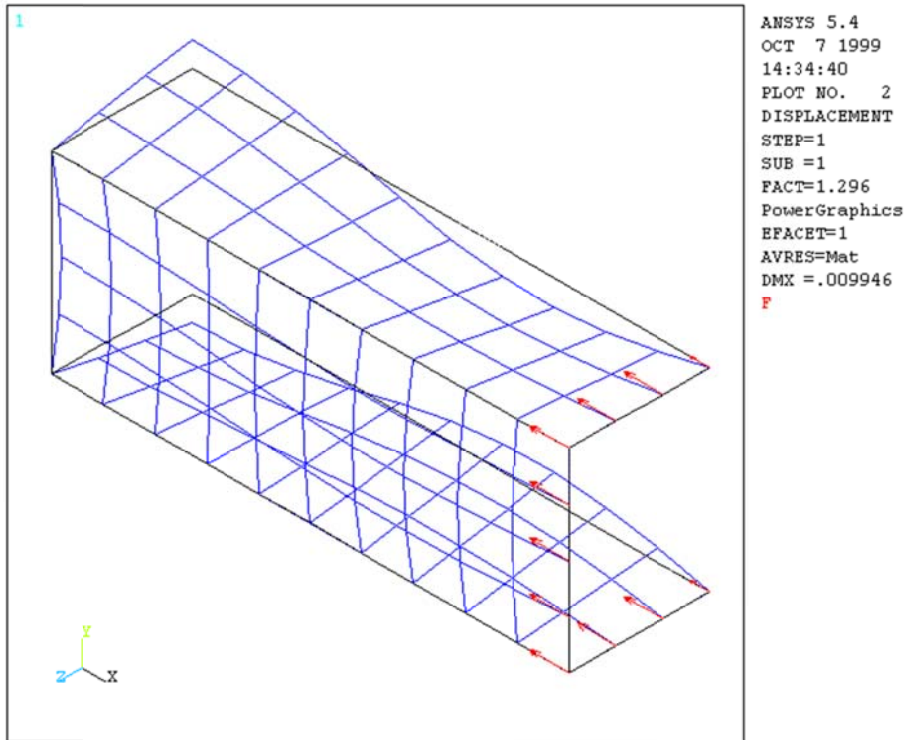
Ukažme nyní výsledky několika úloh, řešených výše uvedeným algoritmem, a to opět pomocí systému ANSYS, s využitím prvku SHELL63. Prvním příkladem je válcová skořepina, na obou koncích vetknutá, zatížená vnějším přetlakem – viz [příklad 3.3](#).

Druhou ilustrativní úlohou je případ osově zatíženého prutu profilu U dle obr.3.5, podrobně analyticky řešeného v [16]. Detailní zadání a postup řešení je popsán v [příkladu 3.4](#). Naším cílem je upozornit na kvalitativně různý charakter ztráty stability v závislosti na délce prutu. Pro krátké pruty je charakteristické lokální boulení stěn pásnic nebo stojiny, u větších délek dochází k ohybově-krutovému vybočení střednice a teprve pro dlouhé pruty je typické ohybové vybočení. Výpočet byl proto proveden pro tři různé délky prutu tak, abychom dokumentovali schopnost numerického řešení správně určit různý charakter ztráty stability prutu. Výsledky jsou uspořádány v tab.3.1, kde jsou pro každou z délek pro informaci uvedeny tři nejnižší kritické hodnoty osové síly, i když z hlediska hodnocení konstrukce nás samozřejmě zajímá pouze první z nich. První vlastní tvar pro každou z délek je uveden na obr.3.6-3.8; písmeny L, K, O je v tabulce vyznačen charakter ztráty stability: lokální (L), ohybově-krutová (K) a ohybová (O). Některé z numerických výsledků je možno konfrontovat s analytickými dle [16], které jsou rovněž uvedeny v tabulce. Jak je patrné, při postupném zkracování prutu se projevuje přechod od ohybové přes ohybově-krutovou až k lokální ztrátě stability, s odpovídajícím zvyšováním hodnoty nejmenší kritické síly.

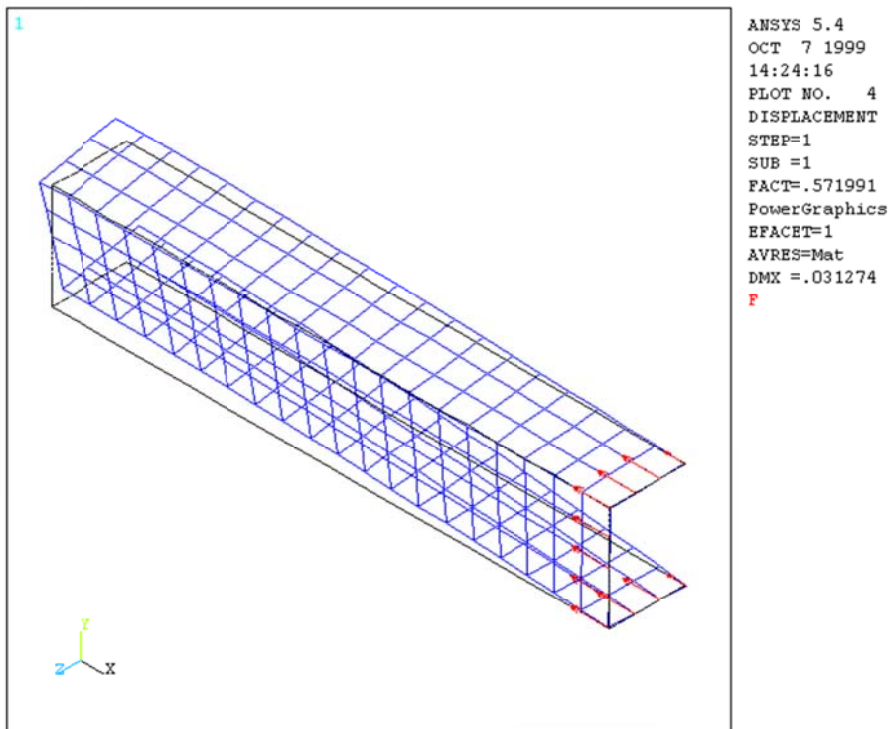
Posledním příkladem bifurkačního chování, na který zde chceme upozornit v [příkladu 3.6](#), je tzv. klopení vysokých nosníků. Typické je zejména pro I-profilů s velkou výškou stojiny, namáhané ohybem v rovině stojiny, které mohou ztratit stabilitu vybočením kolmo na rovinu ohybu – viz obr. 3.9. Opět se jedná o případ, který může snadno uniknout pozornosti méně zkušeného uživatele MKP při posuzování výsledků standardní napěťově-deformační analýzy.



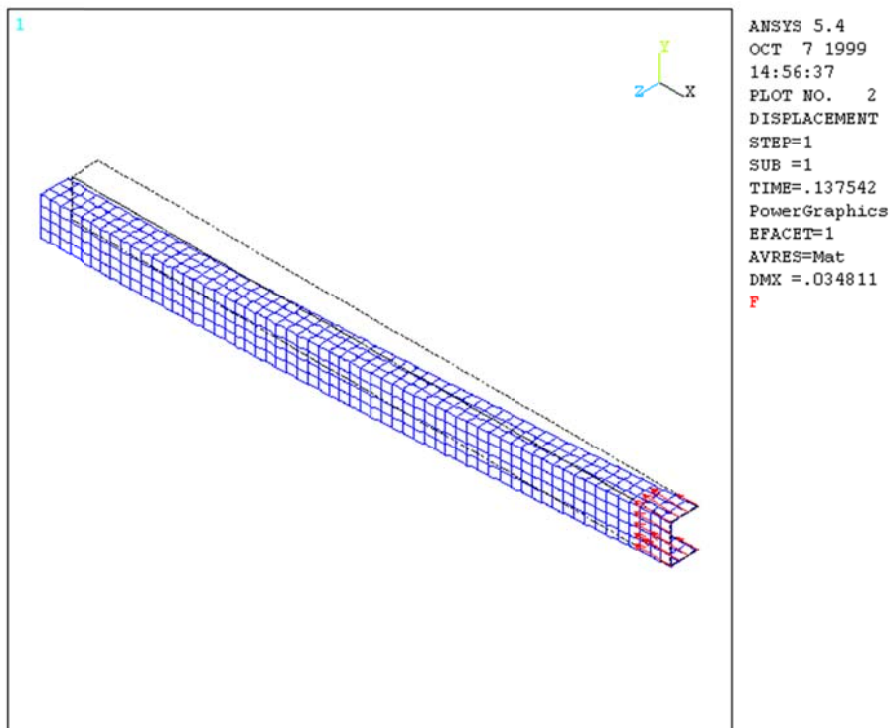
Obr.3.5 Stabilitní analýza U-profilu, osové zatížení, kloubové uložení konců



Obr.3.6 Lokální ztráta stability při délce prutu 500mm, $F_{kr} = 1,30 \cdot 10^6 \text{ N}$
 (zobrazena jen polovina délky prutu)



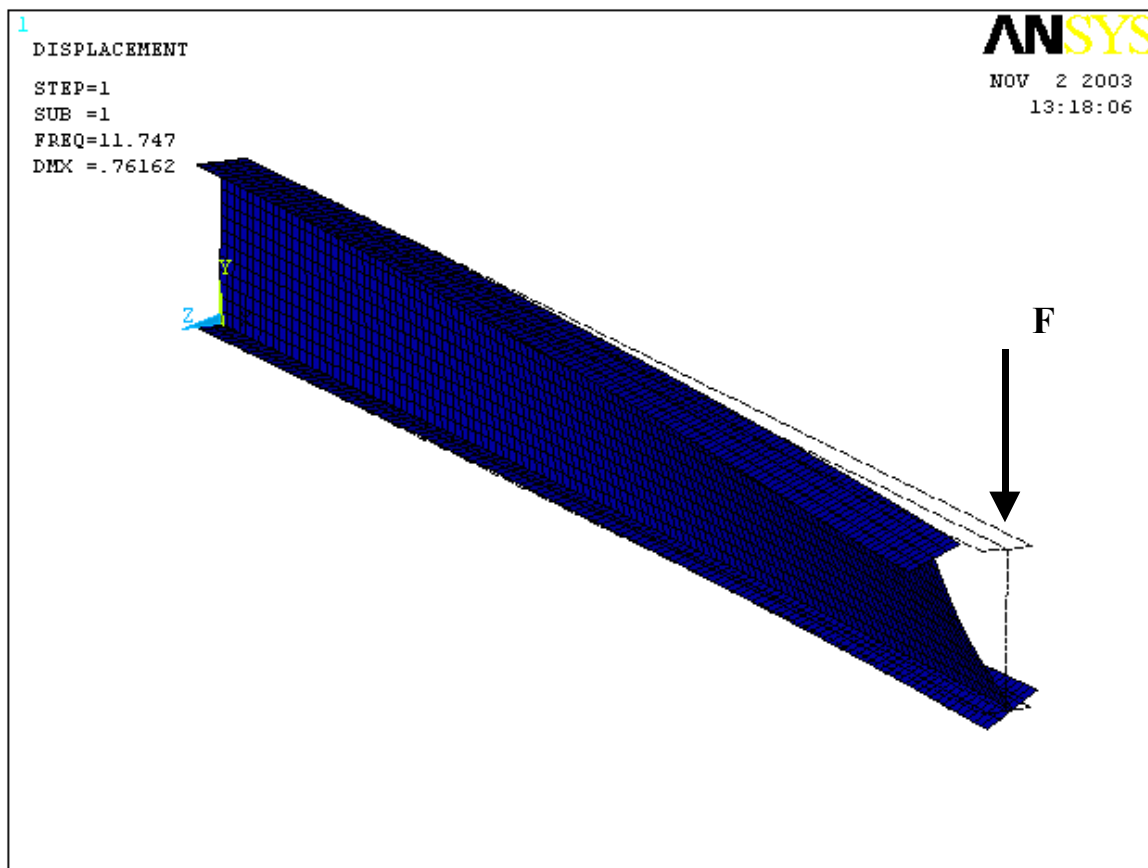
Obr.3.7 Ohybově-krutová ztráta stability při délce prutu 1000mm, $F_{kr} = 0,572 \cdot 10^6 \text{ N}$
 (zobrazena jen polovina délky prutu)



Obr.3.8 Ohybová ztráta stability při délce prutu 3000mm, $F_{kr} = 0,138 \cdot 10^6 \text{ N}$
 (zobrazena jen polovina délky prutu)

Délka [mm]	Kritická síla [10^6 N]					
	F_{kr1}		F_{kr2}		F_{kr3}	
500	1,30	L (obr.3.6)	1,51	K (analyt.1,66)	1,57	L
1000	0,572	K (obr.3.7)	1,19	O	1,26	L
3000	0,137 (analyt. 0,138)	O (obr.3.8)	0,184	K (anal. 0,177)	0,573	K

Tab.3.1 Kritická síla pro různé délky prutu (L, K, O značí lokální, ohybově-krutovou a ohybovou ztrátu stability)



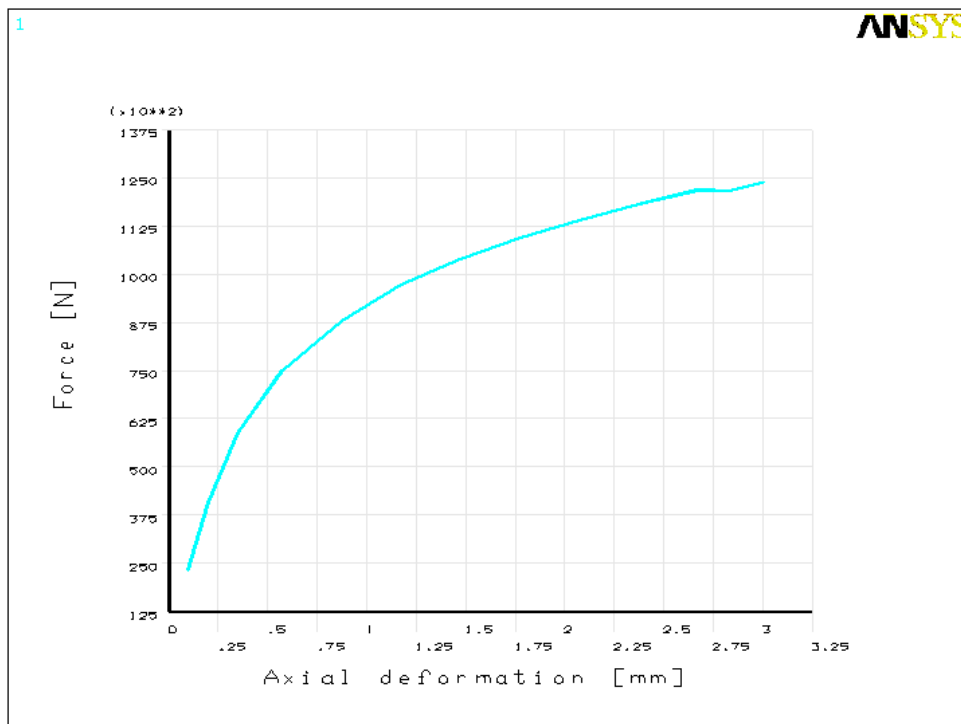
Obr.3.9 Deformace nosníku při ztrátě stability klopením

Nelineární analýza

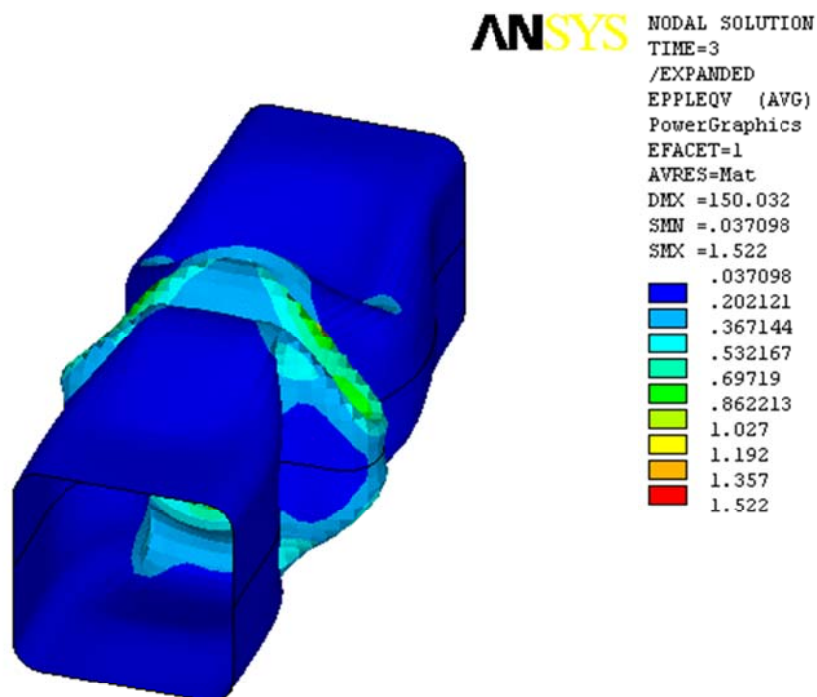
Geometrie a zatížení reálných tenkostěnných konstrukcí jsou často takové, že jednotlivé prvky konstrukce jsou od samého počátku namáhány kromě membránových napětí i ohybem. Únosnost takové konstrukce nelze potom posuzovat z výsledků stabilitní analýzy dle předchozího odstavce, neboť ke ztrátě stability a k bifurkaci nedochází. Křivka zatížení-deformace je hladká, nedochází k jejímu větvení, je ovšem nelineární. Učebnicovým příkladem je srovnání Eulerova vzpěru přímého prutu na jedné straně s prutem s počáteční křivostí na straně druhé. Jediná možnost, jak spolehlivě numericky řešit takové případy, je uskutečnit plně nelineární řešení s postupnými přírůstky zatížení. Nelineární přístup je schopen analyzovat odezvu konstrukce na postupně vzrůstající zatížení, případně i s následným odlehčením. Kromě geometrické nelinearity je zpravidla nutno uvažovat i nelineární chování materiálu. Problémem již v etapě zadávání takového problému je nutnost realistického zadání imperfekcí (tvaru, zatížení, vazeb), jejichž velikost může zásadním způsobem ovlivnit výsledky. K jedinému případu bifurkačního chování tak lze podle velikosti a charakteru imperfekcí přiřadit teoreticky nekonečné množství geometricky podobných, ale deformačně-napěťovou odezvou navzájem rozdílných případů. Náročnost takového výpočtu z hlediska tvorby adekvátního numerického modelu, vlastní realizace výpočtu i jeho vyhodnocení je značná.

Vzhledem k tomu, že rozsáhlá problematika nelineární analýzy je náplní samostatného kurzu, navazujícího na přednášky předmětu *Počítačové metody mechaniky II*, nebudeme se jí na tomto místě podrobněji zabývat. Zájemce o problematiku můžeme odkázat na [5], [6], [7], [9], [10], [17]. Na tomto místě uvedeme pouze ilustrativní [příklad 3.5](#). Jedná se o řešení U-profilu o délce 3000 mm dle předchozího odstavce, který je zatížen osovou silou, jejíž nositelka prochází těžištěm průřezu stojiny a je tedy vzdálena o 23,3 mm od těžiště celého profilu. Jedná se tedy o imperfekci zatížení, jehož výslednice neprochází těžištěm průřezové plochy prutu. Na obr.3.10 uvádíme nelineární průběh závislosti osové síly na axiálním posuvu kloubově podepřeného konce prutu. Zřetelně je vidět výrazné “změknutí” této závislosti v blízkosti kritické hodnoty síly, získané lineární stabilitní analýzou v [Příkladu 3.4](#) ($F_{kr} = 0,137 \cdot 10^6$ N).

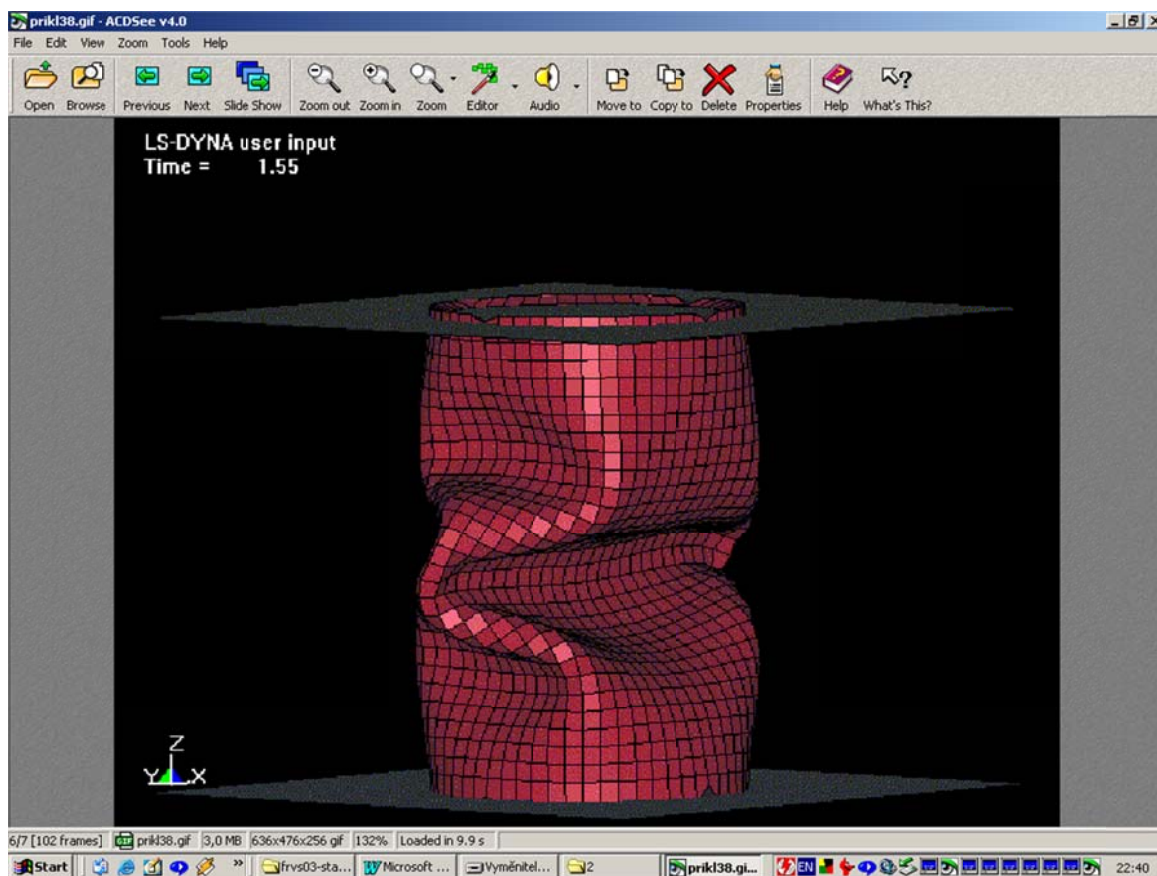
Rozsáhlejší simulace borcení a odezva konstrukce po ztrátě stability je obvykle realizována pomocí explicitních algoritmů MKP, vhodných obzvláště pro simulaci crash-testů. Dvě z jednodušších úloh tohoto typu jsou uvedeny jako [příklad 3.7](#) a [příklad 3.8](#). První představuje borcení tenkostěnného uzavřeného čtvercového profilu se zaoblenými rohy při osovém zatížení. Deformovaný tvar je na obr.3.11, animovaný průběh borcení je uveden [zde](#). Druhý příklad představuje deformaci válcové skořepiny při osovém zatížení. Tento příklad je inspirován experimenty, uvedenými na obr.2.6-2.11. Jednotlivé fáze borcení válcové stěny i animovaný průběh deformace jsou uvedeny v [příkladu 3.8](#) a na obr.3.12-3.13.



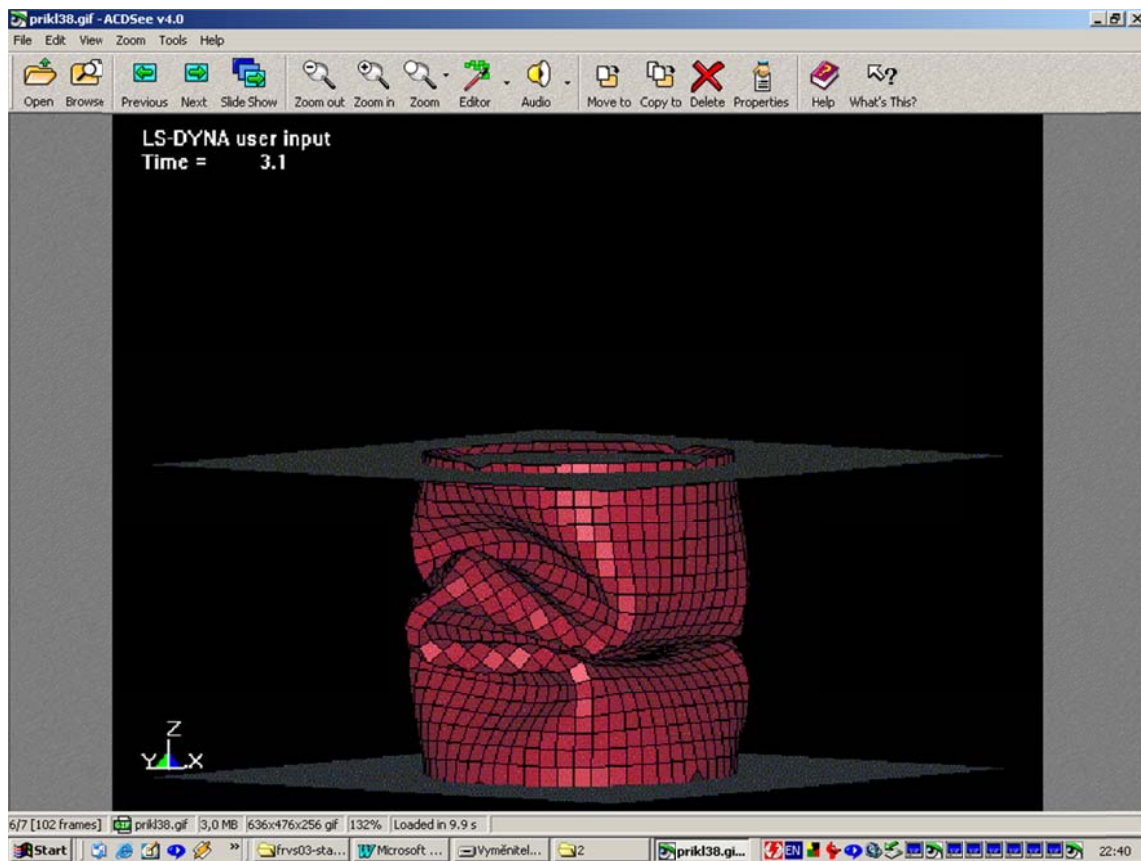
Obr.3.10 Závislost osové síly na axiálním posuvu konce prutu



Obr.3.11 Střední fáze borcení profilu – řešeno explicitním algoritmem



Obr.3.12 Deformace válcové skořepiny při 30% redukce výšky



Obr.3.13 Deformace válcové skořepiny při 50% redukce výšky

11 MKP v dynamice

Problematicke řešení dynamiky spojitého prostředí i diskretních soustav v ustáleném i přechodovém stavu byl věnován předmět *Počítačové metody mechaniky v dynamice*. Zde si proto všimneme jen některých specifíků, které vyplývají z aplikace MKP na problémy dynamiky, aniž bychom se dále zabývali metodami řešení pohybové rovnice pro jednotlivé případy, které lze nalézt např. v [18]. Zastavíme se zejména u diskretizace dynamického problému, jmenovitě u způsobu sestavení matice hmotnosti. Dále vysvětlíme rozdíly mezi tzv. “explicitním” a “implicitním” algoritmem MKP. Podrobněji je spojení dynamiky s MKP pojednáno v publikacích [4], [5], [6], [9], [19].

11.1 Diskretizace dynamického problému pomocí MKP

Sestavení základních matic při řešení dynamické úlohy budeme opět ilustrovat na jednorozměrné úloze dle odst.3.2. U dynamických úloh jsou hledané veličiny a tedy i posuvy jako nezávislé neznámé funkce času, rovnice (3.6) má tedy podobu

$$u(x, t) = \mathbf{N}(x) \cdot \delta(t) \quad , \quad (11.1)$$

jejich časovou derivaci pak získáme rychlosti a zrychlení uzlových bodů

$$\dot{u} = \mathbf{N} \cdot \dot{\delta} \quad , \quad (11.2)$$

$$\ddot{u} = \mathbf{N} \cdot \ddot{\delta} \quad . \quad (11.3)$$

Setrvačné síly zahrneme do algoritmu MKP prostřednictvím objemového zatížení, které rozšíříme pomocí d'Alembertova principu o setrvačný člen $-\rho\ddot{u}$. Dosazením takto rozšířeného objemového zatížení do výrazu pro celkovou potenciální energii Π dostaneme v případě naší jednorozměrné úlohy

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_L \sigma \varepsilon S dx + \int_L u \rho \ddot{u} S dx - \int_L u \rho g S dx \quad (11.4)$$

Zaměříme se na 2. člen tohoto výrazu, který představuje příspěvek setrvačných sil a rozšiřuje celkovou potenciální energii (11.4) oproti výrazu (3.10). Dosazením za u a \ddot{u} z (11.1) a (11.3) získáme

$$\delta^T \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} S dx \ddot{\delta} = \delta^T \mathbf{m} \ddot{\delta} \quad , \quad (11.5)$$

kde \mathbf{m} je matice hmotnosti prvku, jejíž explicitní tvar pro náš prutový prvek je

$$\mathbf{m} = \frac{1}{6} \rho h S \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad . \quad (11.6)$$

Ostatní části funkcionálu Π dle 11.4 vedou po diskretizaci k prvkovým maticím tuhosti \mathbf{k} a zatížení \mathbf{f} , jak bylo detailně uvedeno v odst.3.2.2 a 3.2.3. Sestavení celkové matice hmotnosti \mathbf{M} se provede z prvkových příspěvků stejně, jako u matice \mathbf{K} , a po předepsání okrajové podmínky $u_1 = 0$ má základní rovnice MKP pro dynamickou úlohu bez tlumení tvar

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}(t) . \quad (11.7)$$

Celková matice hmotnosti vypadá v našem konkrétním případě takto:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{6} \rho h S \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \quad (11.8)$$

Vzhledem k identickému algoritmu sestavování celkových matic \mathbf{M} a \mathbf{K} z prvkových příspěvků má \mathbf{M} i stejnou strukturu obsazení nulových a nenulových prvků jako \mathbf{K} . Takto sestavená matice hmotnosti se nazývá *konzistentní*. Kromě toho se v MKP často pracuje s maticí hmotnosti *diagonální*, jejíž použití bývá v souvislosti s některými algoritmy řešení dynamických úloh výhodnější. Diagonální matice je nejčastěji vytvořena přičtením hodnot mimodiagonálních prvků každého řádku konzistentní matice na diagonálu, fyzikálně pak představuje soustředění hmotnosti přilehlé části prvku do uzlu. V naší úloze by diagonální matice hmotnosti měla tvar

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} \rho h S \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.9)$$

Kromě matic hmotnosti a tuhosti je v mnoha případech nutno do pohybové rovnice zahrnout i vliv tlumení prostřednictvím matice \mathbf{C} . Základní rovnice v dynamickém případě má potom tvar

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}(t) . \quad (11.10)$$

Na rozdíl od matic \mathbf{K} , \mathbf{M} , které jsou odvozeny od dobře známých a snadno měřitelných materiálových vlastností (modul pružnosti E , Poissonovo číslo μ , hustota ρ), je podobné odvození matice tlumení problematické. Na výsledném efektu tlumení se totiž často společně podílejí různou měrou tři odlišné vlivy:

- materiálové tlumení, tj. nevratná přeměna části deformační energie v teplo,
- konstrukční tlumení, způsobené mikroprokluzy a třením mezi různými montážními celky, spojenými pomocí šroubů, nýtů, čepů a jiných spojovacích prostředků,
- tlumicí vliv prostředí, narůstající s rychlostí dynamických dějů a viskozitou okolí.

Vyjádřit matici tlumení jednoduchým a přitom spolehlivým způsobem z elementárních fyzikálních veličin, popisujících výše uvedené vlivy, je prakticky nemožné. Nejčastěji se proto matice tlumení formuluje jako proporcionálně úměrná (tzv. „proportionální tlumení“) dvěma zbývajícím maticím (11.10), tedy ve tvaru

$$\mathbf{C} = \alpha \cdot \mathbf{M} + \beta \cdot \mathbf{K} \quad (11.11)$$

kde konstanty α a β musí být stanoveny experimentálně z měření odezvy analyzované dynamické soustavy.

11.1.1 Vlastní netlumené kmitání

Nejčastěji prováděným typem dynamického výpočtu pomocí MKP je úloha vlastního (volného) netlumeného kmitání, označovaná též jako modální analýza – určení vlastních tvarů a frekvencí. Tento problém vychází z rovnice (11.7), v níž není uvažováno buzení

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (11.7a)$$

Za předpokladu harmonického kmitání $\mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}} e^{i\Omega t}$ dostaneme po dvojí derivaci, dosazení do (11.7a) a úpravě

$$(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M}) \cdot \bar{\mathbf{U}} = \mathbf{0}, \quad (11.7b)$$

kde $\bar{\mathbf{U}}$ je sloupcová matice amplitud harmonických kmitů a Ω úhlová frekvence kmitání. Jedná se z matematického hlediska o řešení tzv. *vlastního problému*, známého i z jiných kapitol mechaniky (viz hlavní složky tenzoru napětí, Eulerův případ ztráty stability aj.). Jak známo, rovnice (11.7b) má netriviální řešení pouze pro diskrétní hodnoty *vlastních* frekvencí Ω_i , $i = 1, n$, kde n je řád matic \mathbf{K} , \mathbf{M} . Vlastní frekvence plynou z podmínky nulového determinantu

$$\det|\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (11.7c)$$

Každé z vlastních frekvencí Ω_i přísluší vlastní tvar kmitání $\bar{\mathbf{U}}_i$. Podrobněji je problematika pojednána v každé učebnici dynamiky a kmitání, viz např. [18]. Zde pouze zdůrazněme, že v systémech MKP se k řešení *vlastního problému* standardně nabízí celá řada algoritmů, v Ansysu např. sedm, vhodných pro různé případy. Pro velké soustavy se symetrickými maticemi bez tlumení dle rovnice (11.7b) lze doporučit metodu iterace v podprostoru (subspace iteration method), případně Lanczosovu metodu.

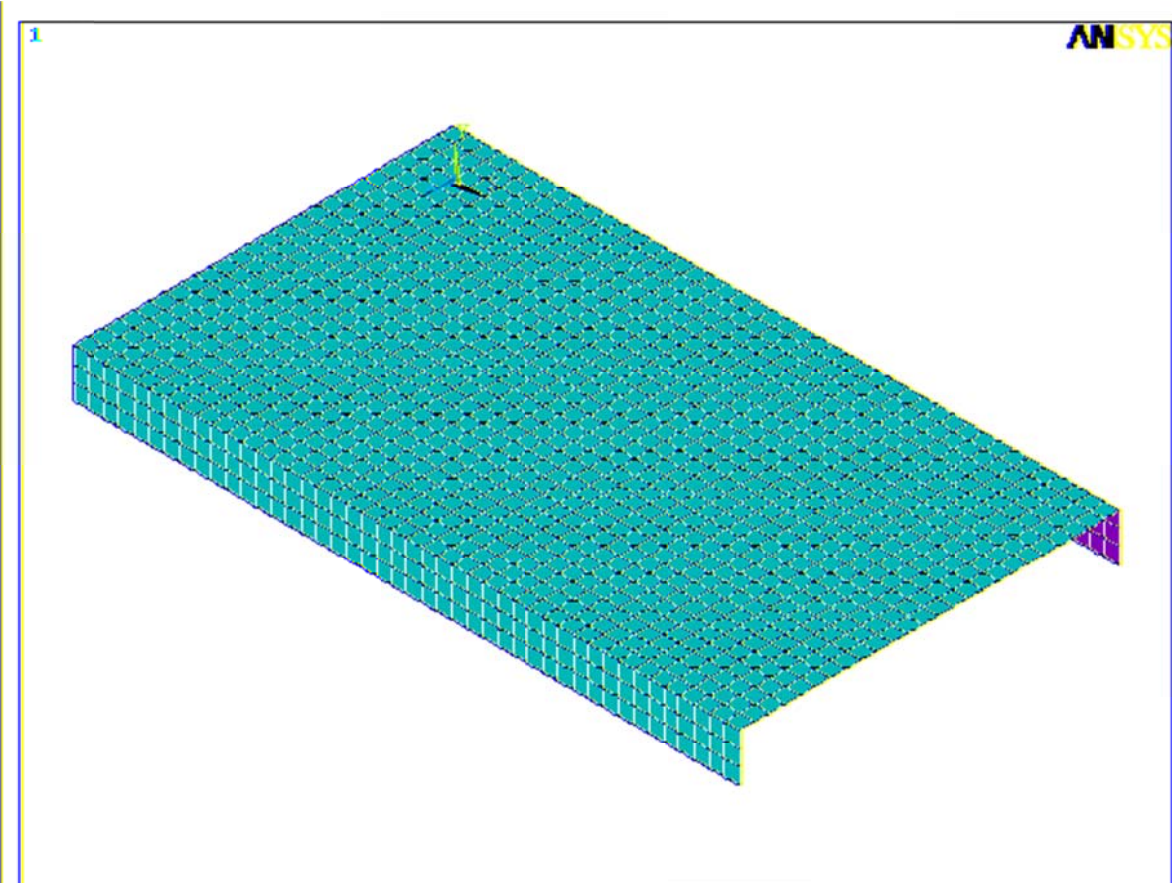
Cílem modální analýzy je v první řadě získání základních dynamických charakteristik řešené struktury tak, aby bylo možno předejít rezonanci za provozu. Kromě toho je ovšem modální řešení výchozím bodem pro mnohé další, podrobnější dynamické analýzy jako je analýza přechodových dějů, harmonická či spektrální analýza. Zpravidla není nutno z (11.7b) určovat všechny vlastní frekvence a tvary kmitání, ale pouze malé množství nejnižších vlastních hodnot. U těch za provozu nejvíce hrozí kolize s některou z budících frekvencí vnějšího zatížení a dosažení nebezpečného rezonančního stavu se všemi negativními důsledky.

V MKP systémech bývá obvyklé k vlastním tvarům $\bar{\mathbf{U}}$, tedy k amplitudám posuvů, dopočítávat i jim odpovídající průběhy napětí – tedy amplitudy složek napětí při dané frekvenci. K tomu je třeba připomenout, že řešení vlastní úlohy poskytuje amplitudy $\bar{\mathbf{U}}$ i amplitudy napětí v podobě poměrných čísel, jistým způsobem normovaných. Nelze tedy určit konkrétní hodnoty napětí, nýbrž pouze tvar napěťového pole při dané frekvenci.

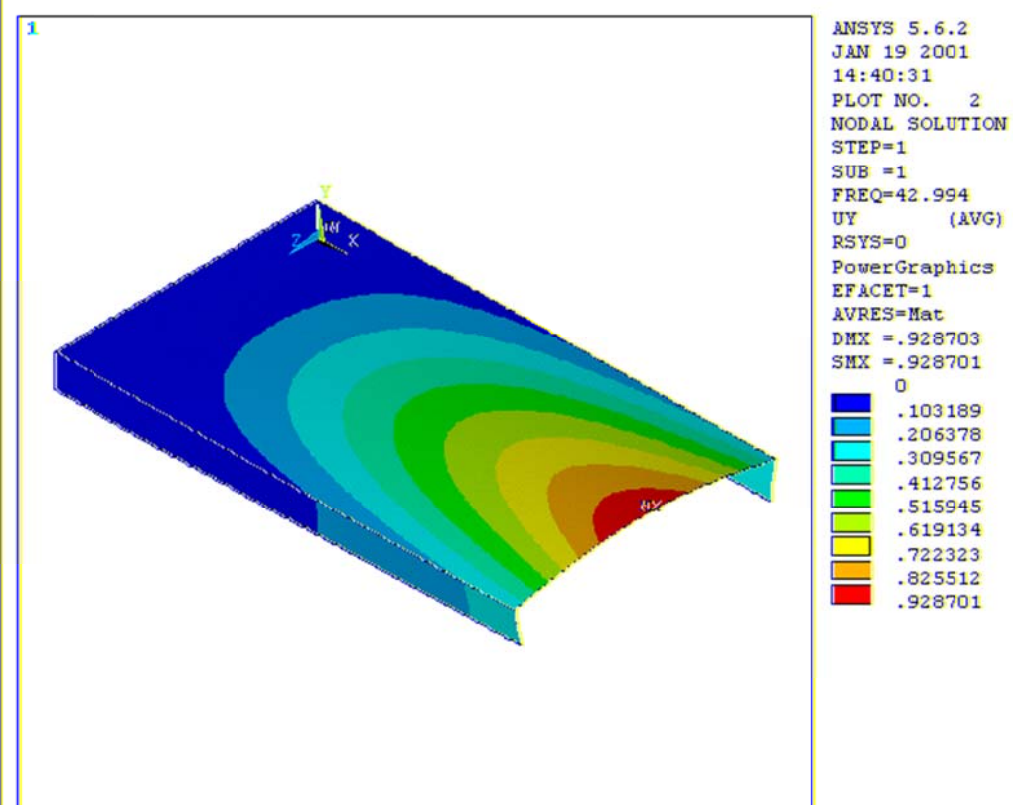
Hodnoty vlastních frekvencí na výstupu ze systémů MKP pak bývá obvyklé poskytovat ne v podobě úhlových frekvencí Ω , ale v podobě frekvence (kmitočtu) f , vyjádřené v Hz:

$$f = \Omega / 2\pi.$$

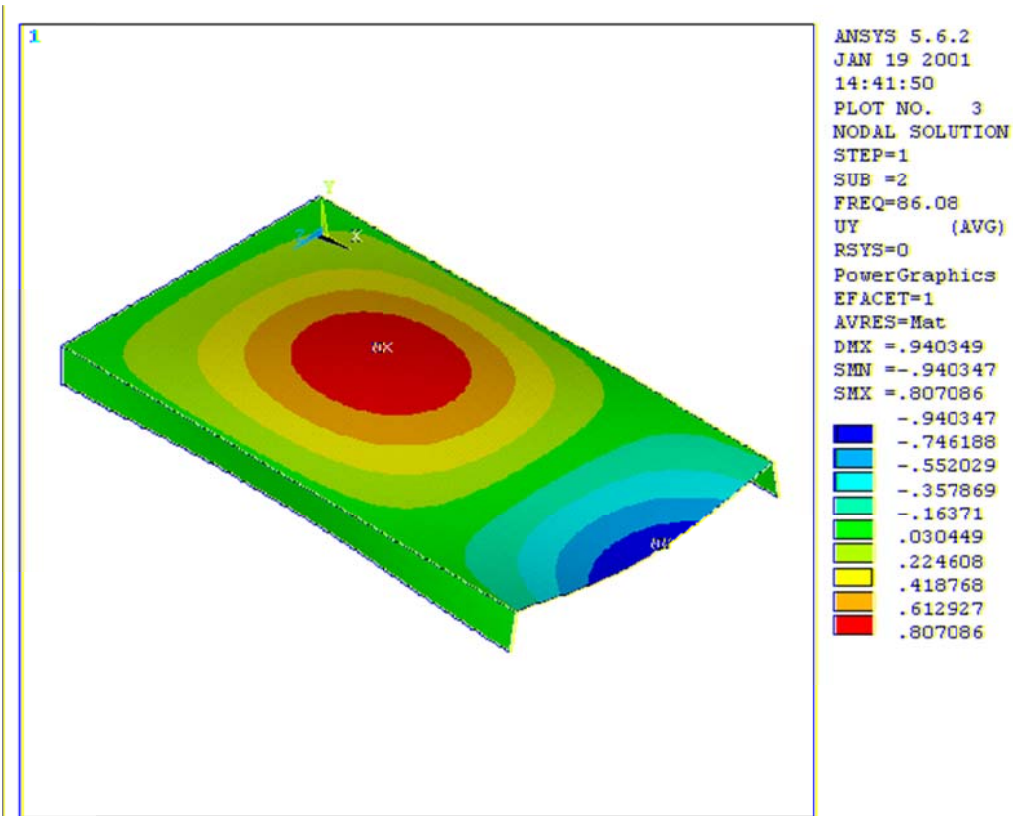
Ilustrativní řešení problému vlastního kmitání je předvedeno v [Příkladu 11.1](#). Jedná se o jednoduchou tenkostěnnou konstrukci dle obr.11.1. Výsledky prvních šesti vlastních tvarů v animované podobě jsou uvedeny v souborech [mode1.avi](#), [mode2.avi](#), [mode3.avi](#), [mode4.avi](#), [mode5.avi](#), [mode6.avi](#)., vybrané tvary pak na obr.11.2-11.5.



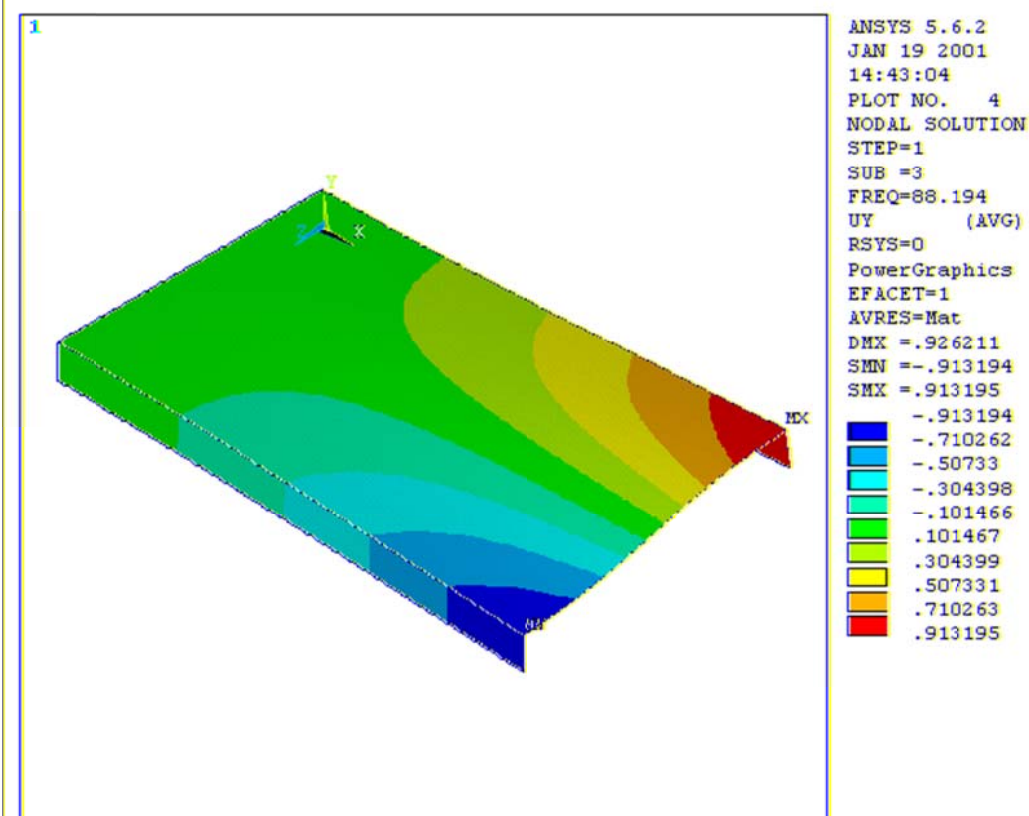
Obr.11.1 Výpočtový model konzoly pro analýzu vlastních tvarů a frekvencí



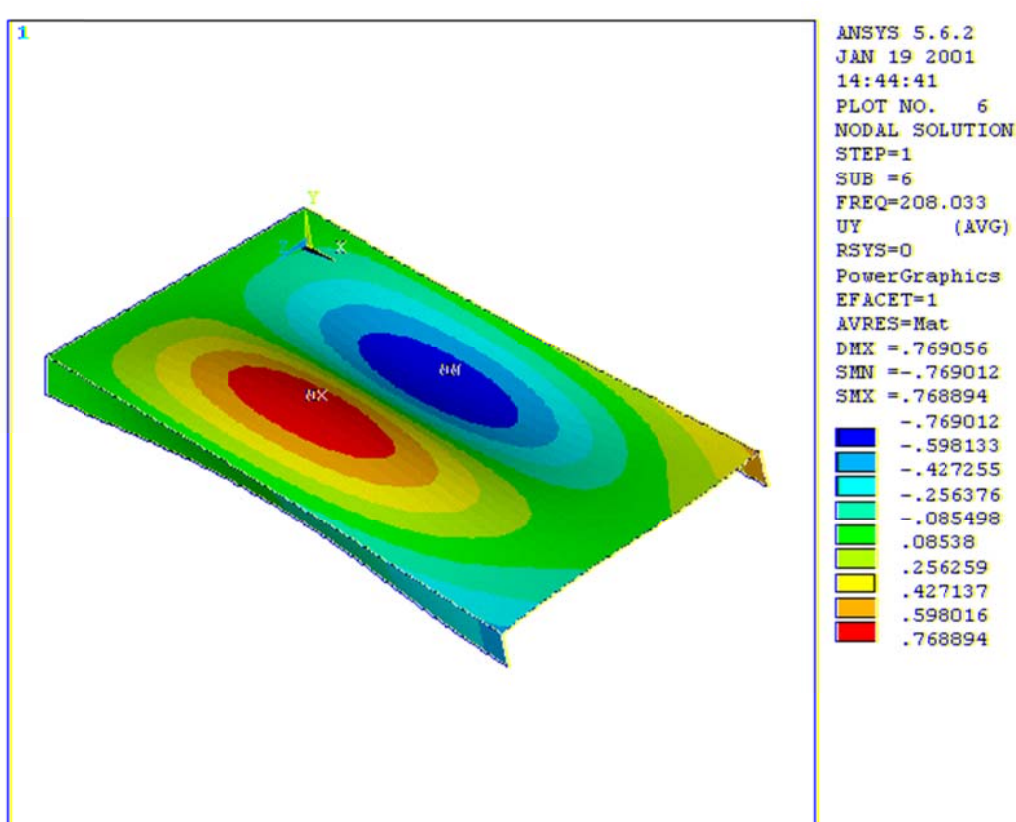
Obr.11.2 První vlastní tvar kmitání konzoly



Obr.11.3 Druhý vlastní tvar kmitání konzoly



Obr.11.4 Třetí vlastní tvar kmitání konzoly



Obr.11.5 Šestý vlastní tvar kmitání konzoly

11.1.2 Vynucené netlumené harmonické kmitání

Uvažujme mechanickou soustavu bez tlumení, která je harmonicky buzena soustavou sil

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \overline{\mathbf{F}} e^{i\omega t} \quad (11.7d)$$

V ustáleném stavu bude celá soustava kmitat harmonicky s budicí frekvencí $\mathbf{U} = \overline{\mathbf{U}} e^{i\omega t}$.

Velikost amplitud kmitání $\overline{\mathbf{U}}$ dostaneme obdobně jako v předchozím odstavci dosazením za \mathbf{U} do rovnice (11.7d) a úpravami. Získáme tak rovnici pro určení $\overline{\mathbf{U}}$ ve tvaru

$$\widehat{\mathbf{K}} \cdot \overline{\mathbf{U}} = \overline{\mathbf{F}}, \quad (11.7e)$$

kde $\widehat{\mathbf{K}}$ je dynamická matice tuhosti:

$$\widehat{\mathbf{K}} = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}). \quad (11.7f)$$

Na rozdíl od řešení vlastního problému je nyní ω známá budicí frekvence a matici $\widehat{\mathbf{K}}$ je snadné sestavit, pokud platí $\omega \neq \Omega_i$, $i = 1, n$. V případě rovnosti má matice $\widehat{\mathbf{K}}$ nulový determinant (srovnej s (11.7.c)) a soustava (11.7e) nemá jednoznačné řešení. To je v souladu se skutečností, že budicí frekvence je rovna vlastní frekvenci a netlumená soustava je v rezonanci – amplitudy rostou nade všechny meze.

Ukažme řešení úlohy vlastního kmitání s navazující analýzou vynucených kmitů na [Příkladě 11.1.2 a 11.1.3.](#)

11.2 Implicitní a explicitní algoritmus MKP

Termín implicitní, resp. explicitní konečné prvky se vztahuje ke způsobu časové integrace pohybové rovnice (11.7), resp.(11.10). Mohlo by se tedy zdát, že jako metoda řešení pohybové rovnice tato problematika s konečnými prvky souvisí jen vzdáleně. Jak ovšem uvidíme, algoritmus samotného sestavování pohybové rovnice je s metodou jejího následného řešení úzce svázán a proto je oprávněné hovořit o různých variantách algoritmu MKP.

11.2.1 Implicitní algoritmus

Uvažujme řešení nestacionárního dynamického problému bez tlumení, popsaného pohybovou rovnicí (11.7). Předpokládejme, že známe řešení v časových okamžicích $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ a naším úkolem je určení všech neznámých veličin v časovém okamžiku t_{n+1} . Aktuální časový krok je $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. Pohybová rovnice v čase t_{n+1} má podobu

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} \quad (11.12)$$

Nejprve vyjádříme hledané rychlosti a zrychlení z diferenčních formulí

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = (\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n) / \Delta t \quad (11.13)$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} = (\dot{\mathbf{U}}_{n+1} - \dot{\mathbf{U}}_n) / \Delta t \quad (11.14)$$

Využitím předchozích výrazů lze zrychlení $\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}$ vyjádřit prostřednictvím posuvů

$$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} = (\mathbf{U}_{n+1} - 2\mathbf{U}_n + \mathbf{U}_{n-1}) / \Delta t^2 \quad (11.15)$$

a dosadit do (11.12). Po úpravě získáme soustavu rovnic pro určení neznámých posuvů v čase t_{n+1}

$$(\mathbf{K} + \mathbf{M}/\Delta t^2) \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} + \mathbf{M} (2\mathbf{U}_n - \mathbf{U}_{n-1}) / \Delta t^2 \quad (11.16)$$

Pokud označíme jako dynamickou matici tuhosti matici

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \mathbf{M}/\Delta t^2 \quad (11.17)$$

a dynamickou matici zatížení matici

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_{n+1} + \mathbf{M} (2\mathbf{U}_n - \mathbf{U}_{n-1}) / \Delta t^2, \quad (11.18)$$

pak posuvy v čase t_{n+1} získáme řešením soustavy, formálně podobné statickému problému

$$\hat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{U}_{n+1} = \hat{\mathbf{F}} \quad (11.19)$$

V praxi se častěji než ilustrativně použitá metoda dopředných diferencí používá u implicitních algoritmů například Newmarkova metoda [17], podstatné rysy implicitního algoritmu však zůstávají zachovány:

1. Posuvy v čase t_{n+1} získáváme z pohybové rovnice v tomtéž časovém okamžiku, odtud název algoritmu – implicitní.
2. Při zanedbatelných setrvačných silách je možno ze soustavy (11.19) vypustit matici hmotnosti \mathbf{M} a problém přejde v řešení statické úlohy – rovnici (3.30) je z tohoto hlediska možno považovat za limitní případ nestacionárního dynamického problému, řešeného implicitním algoritmem. Proto se někdy hovoří o implicitním řešení i v souvislosti se statickou úlohou.
3. Při řešení každého časového kroku je třeba opakovaně řešit soustavu (11.19), včetně časově náročné triangularizace dynamické matice tuhosti. Pouze v případě lineární úlohy a konstantního časového kroku je možno triangularizaci matice $\hat{\mathbf{K}}$ uskutečnit jen jedenkrát

v prvním kroku a v následných krocích opakovat pouze rychlou redukci pravé strany a zpětný chod.

4. Implicitní algoritmus je *nepodmíněně stabilní*, to znamená, že řešení je stabilní bez ohledu na volbu délky časového kroku Δt . Pozor - nezaměňovat *stabilitu* a *přesnost*: při nevhodné délce Δt může být samozřejmě výsledek nepřesný z hlediska našich požadavků na soulad mezi chováním výpočtového modelu a skutečného mechanického systému, přitom se však chová stabilně, tzn. že výsledky nerostou nekontrolovaně nade všechny meze. Pro nestabilní chování je typické naprosté zhroucení výpočtu během několika časových kroků.

V důsledku vlastností č.3 a 4 je při použití implicitního algoritmu snahou aplikovat co nejdelší časové kroky. Velké kroky pak vyžadují použití tenzorů velkých deformací při popisu kinematiky pohybu a vedou na nutnost uskutečnit v rámci jednotlivých kroků iterace tak, aby byla dostatečně přesně splněna pohybová rovnice (11.16) v každém časovém okamžiku. To je zpravidla uskutečňováno přírůstkově-iteračním algoritmem modifikované Newtonovy-Raphsonovy metody.

Příklad šíření napěťové vlny obdélníkovou oblastí, řešený implicitním algoritmem jako 2D úloha, je v animované podobě uveden [zde](#). Detaily k zadání a řešení dané úlohy jsou uvedeny v [Příkladu 11.2.1](#).

11.2.2 Explicitní algoritmus

Podobně jako v předchozím odstavci je naším cílem řešení pohybové rovnice (11.7), k aproximaci zrychlení ale nyní použijeme metodu centrálních diferencí

$$\ddot{\mathbf{U}}_n = (\mathbf{U}_{n+1} - 2\mathbf{U}_n + \mathbf{U}_{n-1}) / \Delta t^2 . \quad (11.20)$$

Dosazením zrychlení do pohybové rovnice v čase t_n

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{U}}_n + \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}_n = \mathbf{F}_n \quad (11.21)$$

získáme po úpravách rovnici pro posuvy v čase t_{n+1}

$$(\mathbf{M}/\Delta t^2) \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{F}_n - \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}_n + \mathbf{M} (2\mathbf{U}_n - \mathbf{U}_{n-1}) / \Delta t^2 . \quad (11.22)$$

Uveďme základní charakteristické rysy explicitního algoritmu ve stejném pořadí, jako v předchozím odstavci – tím vyniknou i základní rozdíly mezi oběma přístupy:

1. Posuvy v čase t_{n+1} získáváme z pohybové rovnice (11.21), psané pro předchozí časový okamžik t_n , odtud název algoritmu – explicitní.
2. Při zanedbání matice hmotnosti se algoritmus stane nepoužitelný, nelze tedy přímo řešit statické úlohy. Toto omezení se při použití explicitního algoritmu obchází například tak, že se statická rovnováha dosahuje jako asymptotický stav přechodového procesu s kritickým tlumením. Jinou možností je takové zadání hmotnosti nebo rychlosti, při kterém jsou setrvačné síly (kinetická energie) řádově zanedbatelné vůči přetvárným silám (deformační energii) řešené soustavy. Problém je pak formálně řešen jako dynamický, fakticky se však jedná o statické řešení.
3. Zásadní výhoda explicitní formulace se projeví při použití *diagonální matice hmotnosti* \mathbf{M} . V takovém případě se totiž soustava (11.22) rozpadne na samostatné nezávislé rovnice. Z každé z nich lze přímo vyjádřit neznámou už na úrovni prvků bez nutnosti sestavování a následné triangularizace globálních matic tuhosti a hmotnosti. Jeden časový krok explicitního algoritmu je tak o několik řádů rychlejší, než odpovídající krok implicitního řešení. Navíc při zvyšování velikosti úloh narůstá počet operací explicitního řešiče pouze lineárně s počtem neznámých, zatímco u implicitního se navíc projevuje

kvadratická závislost na šířce pásu/fronty matice soustavy (11.19). To je zvláště u prostorových problémů se složitou topologií sítě výrazné omezení implicitního algoritmu.

4. Podstatným omezením explicitní formulace je naopak *podmíněná stabilita* algoritmu. Stabilní výsledky dostaneme pouze při dodržení dostatečně malé délky časového kroku

$$\Delta t < \Delta t_{cr}, \quad (11.23)$$

kde kritická délka časového kroku Δt_{cr} závisí na hustotě sítě a rychlosti c šíření zvuku (napětřových vln) vyšetřovaným prostředím

$$\Delta t_{cr} = L / c ; \quad c = \sqrt{E / \rho} . \quad (11.24)$$

V předchozích výrazech je L charakteristický rozměr **nejmenšího** prvku sítě, E modul pružnosti v tahu a ρ hustota materiálu. Kritický časový krok lze tedy interpretovat jako dobu průchodu napětřové vlny nejmenším prvkem sítě. Při typických rozměrech prvků v běžných analýzách a rychlosti šíření napětřových vln v oceli $c \approx 5000$ m/s vychází často délka časového kroku velmi malá, řádově i $10^{-5} \div 10^{-7}$ s. To je 100÷1000x méně než obvyklý časový krok implicitního algoritmu. Při použití explicitního algoritmu je tedy analyzovaný časový interval rozdělen na mnohem více krátkých časových kroků, jejichž řešení je ale mnohem rychlejší, než v implicitním případě. Vzhledem k malé délce kroku odpadají iterace uvnitř kroku a rovněž popis kinematiky pohybu při velkých deformacích je jednodušší.

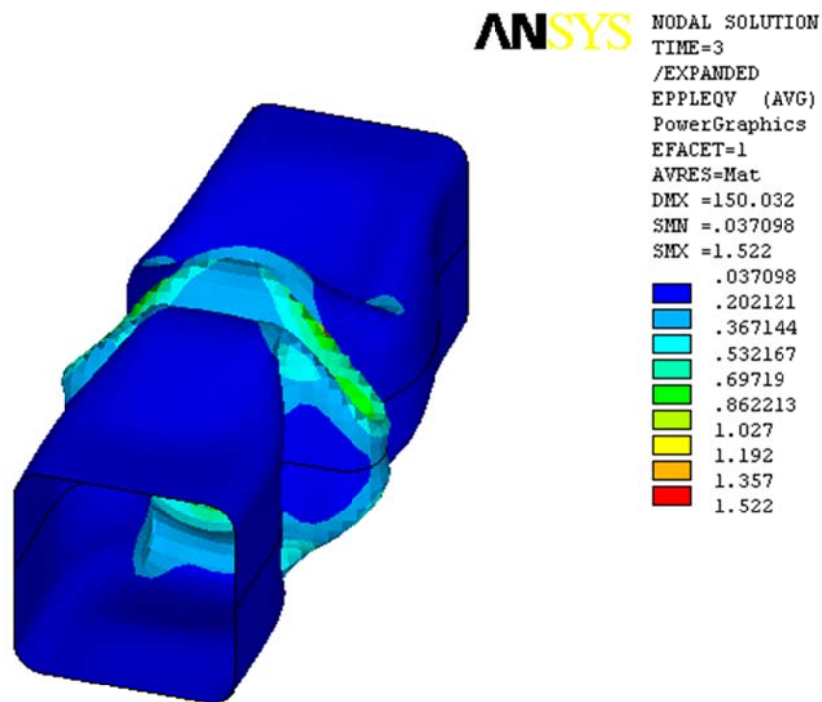
Základní srovnání charakteristik explicitního a implicitního algoritmu je uvedeno v následující tab.11.1.

Tab.11.1 Srovnání explicitního a implicitního algoritmu MKP

	Explicitní	Implicitní
Výhodné pro třídu problémů	rychlé dynamické přechodové děje s výrazně nelineárním chováním typu borcení skořepin, rázová zatížení, velké prostorové úlohy s komplikovanou topologií sítě	statické a 'pomalejší' dynamické úlohy s mírnějšími nelinearitami typu plasticity, rovinné a topologicky jednoduché prostorové sítě
Charakter softwaru	jednoduchý kód, vše ve vnitřní paměti	komplikovanější programy, komunikace s vnější pamětí
Časový krok	malý	větší (typicky 100x, 1000x)
Inverze matic	ne	ano
Rovnovážné iterace v rámci kroku	ne	ano
Popis kinematiky pohybu v rámci kroku	malé rotace	velké rotace
Požadavky na paměť	malé	velké

Ze srovnání vlastností obou typů algoritmů vyplývá vhodnost explicitního algoritmu v případech analýzy velmi rychlých dějů na topologicky složitých prostorových sítích. Ne náhodou jsou nejdůležitější aplikace explicitních konečných prvků v oblasti výpočtové simulace bariérových zkoušek automobilů, dynamické únosnosti leteckých konstrukcí, důsledků explozí či průstřelů ocelových konstrukcí a podobných dějů. Prakticky vždy jsou tyto procesy spojeny s velkými materiálovými i geometrickými nelinearitami. Příklad takové analýzy – zborcení tenkostěnného profilu při jeho rázovém zatížení v osovém směru – je uveden [zde](#) a na obr.11.6, detaily k uvedené úloze viz [Příklad 11.2.2](#).

Mezi nejvýznamnějšími programy, vyvinutými výlučně na uvedené bázi explicitního algoritmu, je třeba jmenovat programy LS-DYNA a PAM-CRASH. Kromě toho se možnost explicitního řešení stále častěji objevuje jako volitelná varianta i ve velkých komerčních systémech, tradičně budovaných na implicitním algoritmu. V každém případě může pro některé třídy úloh přechod z implicitní na explicitní řešení znamenat velmi významné, i řádové urychlení výpočtu. K urychlení směřují vedle již vyjmenovaných příčin i další opatření explicitních algoritmů, jako je speciálně ošetřená redukovaná integrace prvkových matic. Použití jednobodové integrace oproti integraci řádu 2 u prostorových masivních prvků (viz odst.5.3.3), vede k osminásobnému urychlení procesu sestavování prvkových matic, což opět výrazně zkrátí dobu řešení jednoho časového kroku.



Obr.11.6 Střední fáze borcení profilu – řešeno explicitním algoritmem

12 Vedení tepla a teplotní napjatost

Vedle napěťově-deformační analýzy je právě analýza vedení tepla patrně druhým nejrozšířenějším typem úlohy v oblasti inženýrských výpočtů, využívajících MKP. Oba typy úloh jsou navíc velmi často spojeny vzájemnou návazností při analýze teplotní napjatosti, kdy je třeba nejprve určit teplotní pole na dané oblasti a poté odpovídající napjatost, vzniklou nerovnoměrnými teplotními dilatacemi. To je typická úloha při posuzování energetických zařízení a s výhodou se zde používá též sítě konečných prvků pro řešení obou navazujících problémů. Hovoříme pak o *slabě sdružené* tepelně-deformační úloze, kdy teplotní pole ovlivňuje deformaci a napjatost, nikoli naopak. Pokud se uvažuje ovlivnění v obou směrech, například při simulaci tvářecích procesů, kde se významná část deformační práce mění v teplo, jedná se o *plně sdružený* tepelně-deformační problém.

Problematiku vedení tepla uvádíme podrobněji i proto, že kromě teplotní analýzy lze odpovídající programové procedury využít bez jakékoli změny i pro některé další inženýrské aplikace. Je to umožněno skutečností, že příslušná diferenciální rovnice popisuje více fyzikálně odlišných, avšak matematicky analogických procesů. Stačí tedy pouze jinak fyzikálně interpretovat jednotlivé proměnné veličiny a konstanty. Příklady takového použití procedur pro analýzu vedení tepla jsou uvedeny v odst. 12.2.

12.1 Základní veličiny a rovnice vedení tepla

Nestacionární vedení tepla pevnými látkami je popsáno diferenciální rovnicí

$$k \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + Q = \rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (12.1)$$

Tuto rovnici je nutno doplnit okrajovými podmínkami, nejčastěji v následující podobě:

1. Předepsaná teplota: na části povrchu tělesa S_T je teplota rovna známé hodnotě T^* , tedy

$$S_T : T = T^* \quad (12.2)$$

2. Předepsaný tepelný tok: na části povrchu tělesa S_q je tepelný tok roven dané hodnotě q^* ,

$$S_q : q = q^* \quad (12.3)$$

3. Přestup tepla konvekcí (smíšená okrajová podmínka): na části povrchu tělesa S_a nabývají teplota a tepelný tok hodnot, vyhovujících rovnici

$$q = \alpha (T - T_o) \quad (12.4)$$

Jednotlivé veličiny a jejich fyzikální rozměr jsou uvedeny v následujícím přehledu:

T [K]	teplota, T_o je teplota okolí vyšetřovaného tělesa,
q [W m ⁻²]	měrný tepelný tok,

α [W m ⁻² K ⁻¹]	součinitel přestupu tepla,
t [s]	čas ,
k [W m ⁻¹ K ⁻¹]	tepelná vodivost,
c [J kg ⁻¹ K ⁻¹]	tepelná kapacita,
ρ [kg m ⁻³]	hustota materiálu,
Q [W m ⁻³]	měrný tepelný výkon.

Vztah mezi teplotou a měrným tepelným tokem je dán Fourierovou rovnicí vedení tepla

$$q = -k \cdot \text{grad } T, \quad (12.5)$$

tepelný tok je tedy úměrný gradientu teplotního pole, záporné znaménko vyjadřuje orientaci toku energie ve směru poklesu teploty. Funkcionál, který je základem variační formulace řešení úlohy teplotního pole, má tvar

$$\Pi_T = \frac{1}{2} \iiint (\mathbf{T}^T \cdot k \cdot \mathbf{T}' + 2 \cdot \rho \cdot c \cdot \dot{T} \cdot T - 2 \cdot Q \cdot T) dV - \iint q^* \cdot T dS_q . \quad (12.6)$$

Mezi jeho členy můžeme postupně rozlišit příspěvky odpovídající teplu vedenému tělesem, tepelné kapacitě materiálu, vnitřním a vnějším zdrojům (tepelný tok povrchem tělesa). Pro zjednodušení zde byl vynechán člen odpovídající konvektivnímu přestupu tepla – viz např.[6]. Primární neznámou veličinou při řešení teplotního pole je teplota, která je při diskretizaci konečnými prvky aproximována nad prvkem obdobně jako složky posuvů v deformačně-napěťové analýze

$$T = \mathbf{N} \cdot \delta_T, \quad (12.7)$$

kde \mathbf{N} je matice bázových funkcí konkrétního prvku a δ_T matice neznámých uzlových teplot. Podstatný rozdíl proti deformačně-napěťovým problémům je v tom, že teplota jako skalární veličina je, na rozdíl od posuvu, plně popsána *jedním neznámým parametrem* v uzlu. Při řešení úlohy na stejné síti má tedy teplotní úloha z hlediska počtu neznámých zhruba poloviční (ve 2D), nebo dokonce třetinovou (ve 3D) velikost.

Konkrétní tvar matice (12.7) můžeme ilustrovat na příkladu rovinné úlohy, řešené pomocí trojúhelníkového prvku s lineárními bázovými funkcemi dle odst.5.1. V tomto případě je

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] , \quad (12.8)$$

$$\delta_T = [T_1, T_2, T_3]^T . \quad (12.9)$$

kde $N_1 \div N_3$ jsou bázové funkce dle obr.5.1, $T_1 \div T_3$ teploty v uzlových bodech prvku. Časovou změnu teploty můžeme vyjádřit jako

$$\dot{T} = \mathbf{N} \cdot \dot{\delta}_T , \quad (12.10)$$

derivace podle prostorových souřadnic pak

$$\mathbf{T}' = \mathbf{L} \cdot \mathbf{N} \cdot \delta_T = \mathbf{B} \cdot \delta_T , \quad (12.11)$$

kde $\mathbf{T}' = \left[\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y} \right]^T$ je matice teplotních derivací rovinné úlohy,

$\mathbf{L} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right]^T$ matice diferenciálních operátorů,

$\mathbf{B} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{N}$ matice, získaná z bázových funkcí N_i jejich parciálními derivacemi.

Dosazením vztahů (12.7)-(12.11) do (12.6) získáme diskretní podobu funkcionálu Π_T na úrovni prvku

$$\Pi_T = \frac{1}{2} \cdot \delta_T^T \cdot \mathbf{k} \cdot \delta_T + \delta_T^T \cdot \mathbf{c} \cdot \dot{\delta}_T - \delta_T^T \cdot (\mathbf{f}_Q + \mathbf{f}_q) , \quad (12.12)$$

kde $\mathbf{k} = \iiint \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} \, dV$ je prvková matice tepelné vodivosti,
 $\mathbf{c} = \iiint \mathbf{N}^T \cdot \rho \cdot c \cdot \mathbf{N} \, dV$ prvková matice tepelné kapacity a
 $\mathbf{f}_Q = \iiint \mathbf{N}^T \cdot Q \, dV$, $\mathbf{f}_q = \iint \mathbf{N}^T \cdot q^* \, dS_q$ jsou matice tepelného zatížení od vnitřních a vnějších zdrojů.

Sestavením celkového funkcionálu součtem příspěvků od jednotlivých prvků a využitím podmínky stacionární hodnoty pomocí stejného postupu, který byl uveden v odst. 3.2.4-5 dostaneme výslednou diskretní podobu rovnice vedení tepla ve tvaru

$$\mathbf{C}_T \cdot \dot{\mathbf{U}}_T + \mathbf{K}_T \cdot \mathbf{U}_T = \mathbf{F}_T \quad (12.13)$$

kde \mathbf{C}_T , \mathbf{K}_T , \mathbf{F}_T jsou globální matice tepelné vodivosti, kapacity a tepelného zatížení a \mathbf{U}_T je matice neznámých uzlových teplot. Jedná se o nestacionární (neustálený, přechodový) problém vedení tepla, řešený numerickou integrací rovnice (12.13). Jako ilustrativní [příklad 12.1](#) je uvedeno řešení nestacionárního teplotního pole izolované průchodky potrubí přepážkou, která je z jedné strany vystavena působení vysokých teplot, simulujících havarijní podmínky při požáru. Výsledkem takové analýzy je podrobně zmapovaný rozvoj teplotního pole v průběhu sledovaného časového intervalu, uvedený v animované podobě [zde](#).

Povšimněme si následujících analogií:

<i>teplotní analýza</i>	<i>deformačně-napěťová analýza</i>
matice tepelné kapacity \mathbf{C}_T	matice hmotnosti \mathbf{M}
matice tepelné vodivosti \mathbf{K}_T	matice tuhosti \mathbf{K}
matice tepelného zatížení \mathbf{F}_T	matice mechanického zatížení \mathbf{F}
neznámé \mathbf{U}_T : teploty T v uzlech	neznámé \mathbf{U} : posuvy u, v, w v uzlech
gradient teploty \mathbf{T}'	přetvoření $\boldsymbol{\varepsilon}$
tepelný tok q	napětí $\boldsymbol{\sigma}$

Obdobná je i pásová struktura jednotlivých matic. Analogie se týká i odpovídajících okrajových podmínek: druhá okrajová podmínka dle (12.3) je v případě variační formulace tzv. přirozenou okrajovou podmínkou. Prakticky to znamená, že pokud při teplotní analýze pomocí MKP na části povrchu nepředepíšeme nic, je zde implicitně zadána podmínka $q = 0$, povrch je tedy dokonale tepelně izolován. Stejně je tomu i u deformačně-napěťových problémů, kde je na volném povrchu automaticky zadána podmínka nulového normálního a smykového napětí (viz *Poznámka* odst.2.4).

Je možné ukázat i rozdíly – zatímco nestacionární problém vedení tepla (12.13) je popsán diferenciální rovnicí prvního řádu, odpovídající dynamický problém (11.7) je reprezentován rovnicí druhého řádu. S tím souvisí jiný algoritmus řešení příslušných rovnic. Stejně jako u matice hmotnosti \mathbf{M} , lze i matici tepelné kapacity \mathbf{C}_T použít v konzistentní nebo diagonální formě – viz odst. 11.1, rov. (11.8), (11.9).

Stacionární, časově neproměnný problém vedení tepla získáme vypuštěním pravé strany z rovnice (12.1)

$$k \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + Q = 0 , \quad (12.14)$$

což v diskretní podobě vede na soustavu rovnic

$$\mathbf{K}_T \cdot \mathbf{U}_T = \mathbf{F}_T \quad (12.15)$$

Jedná se o soustavu obdobnou lineárnímu statickému problému pružnosti, jejíž řešení se zpravidla realizuje pomocí stejných procedur, popsanych v kap.8.

12.2 Alternativní fyzikální interpretace rovnice vedení tepla

Stacionární rovnice vedení tepla (12.14) je jen jednou z možných fyzikálních interpretací kvaziharmonické rovnice, která má v obecnějším případě nehomogenního ortotropního materiálu tvar

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q = 0 \quad (12.16)$$

To znamená, že i její diskretizovaná podoba (12.15) se dá interpretovat různým způsobem a všechny procedury řešení teplotního problému lze při odpovídající záměně materiálových konstant a proměnných veličin použít i k řešení jiných, vzájemně analogických fyzikálních dějů. V komerčních systémech MKP se této analogie skutečně využívá a tytéž části programů jsou používány pro řešení odlišných problémů. Vzájemná záměna odpovídajících veličin se řídí pravidly, uvedenými v následující tabulce:

Tab.12.1 Vzájemně analogické fyzikální problémy

Problém	Neznámá	k_x, k_y (resp. $k = k_x = k_y$)	Q
Vedení tepla	Teplota	Tepelná vodivost	Vnitřní tep.zdroj
Průsak kapaliny porézním materiálem	Hydraulický potenciál	Permeabilita	-
Nestlačitelné proudění	Proudová funkce	Jednotková hodnota	Rotor
Membrána	Průhyb	Membránová síla	Tlak
Krut obec.průřezů	Funkce napětí	(Smykový modul G) ⁻¹	Dvojnásobek zkrutu
Krut obec.průřezů	Deplanační funkce	Jednotková hodnota	-
El. proud	Napětí	El.vodivost	Vnitřní el.zdroj
Magnetostatika	Magnet. potenciál	Magnet.odpor	Proudová hustota

Při praktické aplikaci uvedených analogií musíme ovšem upozornit na velké riziko *formálně prováděných výpočtů* bez dostatečné znalosti fyzikální podstaty řešené problematiky, které mohou vést ke *zcela zavádějícím výsledkům*. Toto riziko se v posledních letech stále zvětšuje úměrně tomu, jak se výkonné výpočtové systémy stávají dostupnější a uživatelsky stále více „přátelské“.

12.3 Teplotní napjatost

Řada strojních součástí (energetika, tvářecí stroje, motory) pracuje za vysokých teplot s nerovnoměrným a časově neustáleným teplotním polem. Díky tomu dochází k teplotní dilataci materiálu a tenzor přetvoření je nutno rozdělit na dvě složky,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_\sigma + \boldsymbol{\varepsilon}_T \quad (12.17)$$

První z nich je vyvolána mechanickým zatížením (napětím), platí tedy

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma = \mathbf{D}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (12.18)$$

resp.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\sigma} = \mathbf{D} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_T) \quad (12.19)$$

Druhá složka je vyvolána teplotní roztažností materiálu

$$\boldsymbol{\varepsilon}_T = \boldsymbol{\alpha} \cdot \Delta T = \boldsymbol{\alpha} \cdot [1, 1, 1, 0, 0, 0]^T \cdot \Delta T, \quad (12.20)$$

kde $\alpha [K^{-1}]$ je koeficient teplotní roztažnosti. Rovnoměrné ohřátí homogenního izotropního materiálu, při kterém není zabráněno volné dilataci, nevyvolá v tělese žádnou napjatost. Nerovnoměrné teplotní pole a/nebo omezení volné dilatace okolím však může vyvolat napjatost, převyšující úroveň ostatních zatěžujících vlivů. K jejímu určení vyjdeme z výrazu pro energii napjatosti (3.2), ve kterém ovšem za přetvoření dosadíme složku $\boldsymbol{\varepsilon}_{\sigma}$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \iiint \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\sigma} dV = \frac{1}{2} \iiint (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_T)^T \cdot \mathbf{D} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_T) dV = \\ &= \frac{1}{2} \iiint \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dV - \iiint \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_T dV + \frac{1}{2} \iiint \boldsymbol{\varepsilon}_T^T \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_T dV \end{aligned} \quad (12.21)$$

Jestliže celkové přetvoření vyjádříme v MKP obvyklým způsobem pomocí deformačních parametrů $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\delta}$ a dosadíme i za $\boldsymbol{\varepsilon}_T$ z (12.20), dostáváme

$$W = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T \iiint \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} dV \boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\delta}^T \iiint \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \Delta T dV + \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \Delta T^2 \cdot V \quad (12.22)$$

V integrálu prvního členu výrazu (12.22) poznáváme standardní matici tuhosti

$$\mathbf{k} = \iiint \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} dV, \quad (12.23)$$

tak jak byla pro různé typy prvků odvozena v kapitolách 3-5. Integrál druhého členu výrazu (12.22) pak představuje prvkovou matici teplotního zatížení

$$\mathbf{f}_T = \iiint \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \Delta T dV \quad (12.24)$$

Jestliže dále rozšíříme energii napjatosti (12.22) o potenciál vnějšího mechanického zatížení od dalších zatěžujících faktorů a uplatníme postup detailně popsany v odst.3.2.4 a 3.2.5 (sestavení globálních matic, minimalizace funkcionálu Π), získáme základní rovnici MKP v obvyklém tvaru

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (12.25)$$

která má v matici zatížení \mathbf{F} zahrnutý i vliv teplotního zatížení dle (12.24). Poslední člen výrazu (12.22) není závislý na deformačních parametrech a při minimalizaci funkcionálu Π proto odpadá.

Pro řešení teplotní napjatosti pomocí MKP je výhodné použít stejné sítě, která byla použita už při předcházející analýze teplotního pole. Výsledné uzlové teploty, získané řešením rovnice (12.13), resp. (12.15), lze pak přímo použít jako vstupy následující deformačně-napěťové analýzy. Knihovny konečných prvků v komerčních systémech nabízejí pro všechny běžné typy strukturních prvků (viz kap.4-7) i odpovídající teplotní prvky. Změna typů prvků na celé síti je zpravidla provedena automaticky při přechodu z jednoho typu úlohy na druhý. Přehled nejběžnějších vzájemně si odpovídajících prvků je uveden v následující tabulce.

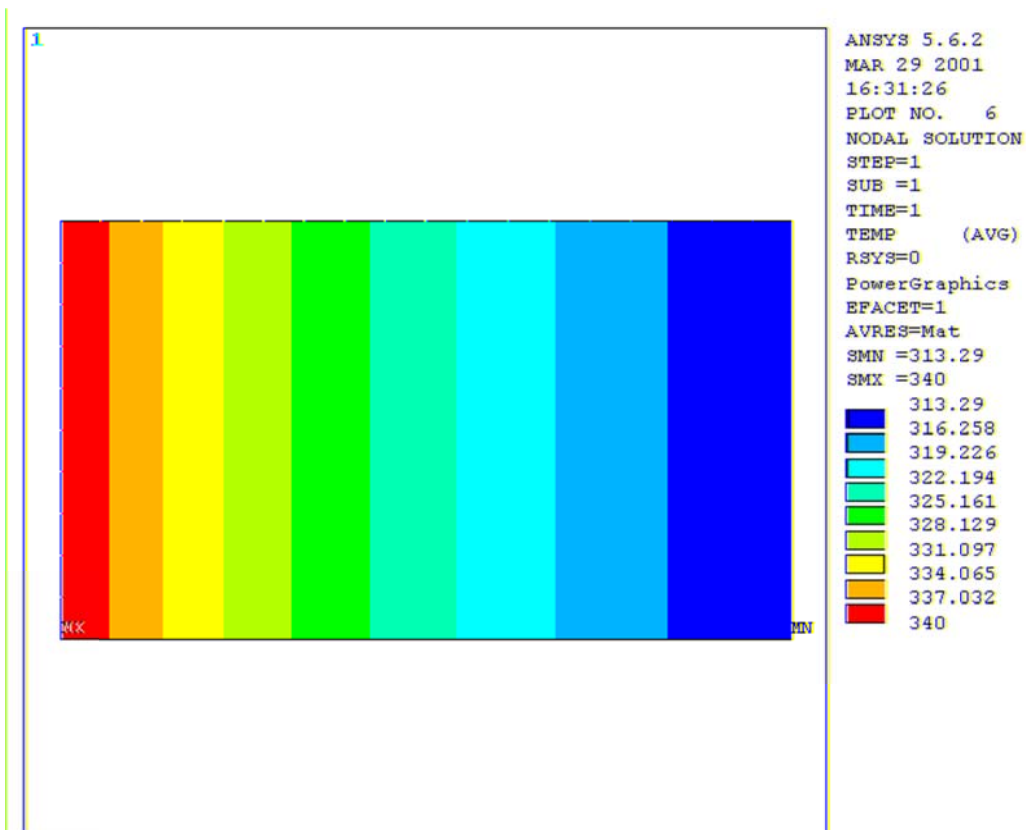
Tab.12.2 Odpovídající prvky pro teplotní a deformačně-napěťovou analýzu

Dimenze	Teplotní analýza	Deformační anal.	viz obrázek č.
Pruty - v rovině	LINK32	LINK1, BEAM3	4.1, 4.4
- v prostoru	LINK33	LINK8, BEAM4	4.2, 4.5

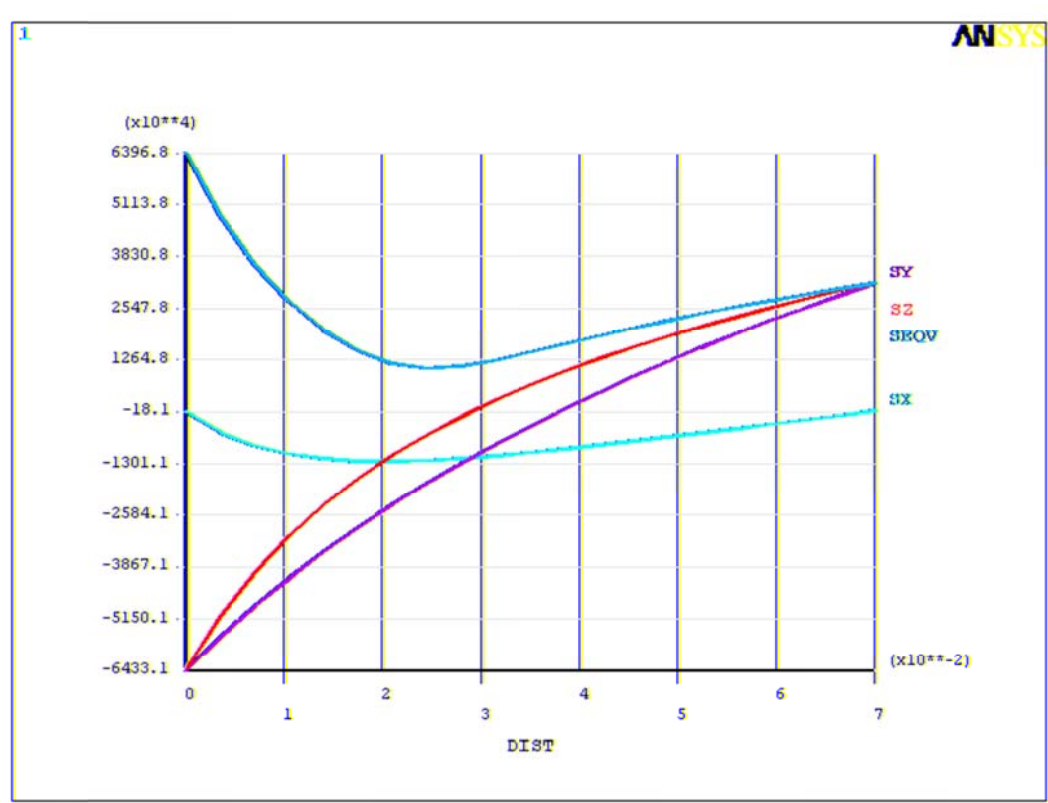
Rovinné problémy	PLANE55	PLANE42	5.10
	PLANE77	PLANE82	5.8
Prostorové problémy	SOLID70	SOLID45	5.13
	SOLID90	SOLID95	5.16

Ilustrace řešení úlohy teplotní napjatosti na jednoduchém případě nerovnoměrně ohřáté stěny válcové nádoby je uvedena v [příkladu 12.2](#). Výsledné průběhy teploty a složek napětí po tloušťce nádoby jsou uvedeny na obr.12.1 a 12.2.

Uvedená úloha se týkala stacionárního teplotního pole. Náročnější je posouzení napjatosti od nestacionárního teplotního pole, což je ovšem častý případ při posuzování spolehlivosti energetických zařízení, kde kritickými etapami jsou jednotlivá spouštění a ohřev. V takovém případě je pak nutno ve všech časových krocích, v nichž máme k dispozici teplotní výsledky, uskutečnit napěťově-deformační analýzu (12.25) a mezi jejími výsledky vybrat časový okamžik, který je z hlediska posuzovaných mezních stavů nejnebezpečnější. Ten není dopředu znám a zpravidla leží uvnitř intervalu, časově ohraničeného počátkem děje a ustáleným stavem. Proto může být nestacionární analýza časově velmi náročná jak z hlediska vlastních výpočtů, tak z hlediska následného vyhodnocování výsledků.



Obr.12.1 Teploty ve stěně nádoby [°C]



Obr.12.2 Složky napětí napříč stěnou nádoby [Pa]: radiální SX, axiální SY, obvodové SZ, redukované SEQV

Literatura

- [1] Turner,M.,J., Clough,R.,W., Matrin,H.,C., Topp,L.,J.: Stress and deflection analysis of complex structures, J.Aero.Sci. 23, (1956), 805-823
- [2] Courant,R.: Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations, Bull.Am.Math.Society 49,(1943), 1-23
- [3] Zienkiewicz,O.,C., Cheung,Y.K.: The finite element method in structural and continuum mechanics, New York-London McGraw-Hill,1967
- [4] Zienkiewicz,O.,C., Taylor,R.L.: The finite element method, 5th ed., Arnold Publishers, London, 2000
- [5] Bathe,K.-J.: Finite element procedures, Prentice Hall, New Jersey, 1996
- [6] Cook,R.,D.: Concepts and applications of finite element analysis, J.Wiley, N.York, 1981
- [7] Owen,D.,R.,J., Hinton,E.: Finite elements in plasticity, Pineridge Press, Swansea, 1980
- [8] Kolář,V., Kratochvíl,J., Leitner,F., Ženíšek,A.: Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků, SNTL Praha, 1979
- [9] Bittnar,Z., Šejnoha,J.: Numerické metody mechaniky I, II, ČVUT Praha, 1992
- [10] Okrouhlík,M. a kol.: Mechanika poddajných těles, numerická matematika a superpočítače, Ústav termomechaniky AV ČR, Praha,1997
- [11] ANSYS 7.1 Documentation, Copyright © 2003 SAS IP, Inc.
- [12] Mackerle,J.: Finite Element Methods, A Guide to Informational Sources, Elsevier, 1991
- [13] Ondráček,E., Vrbka,J., Janíček,P.: Mechanika těles – pružnost a pevnost II, skriptum FS VUT Brno, 1988
- [14] Němec,J., Dvořák,J., Höschl,C.: Pružnost a pevnost ve strojírenství, SNTL Praha, 1989
- [15] Höschl,C.: Pružnost a pevnost ve strojnictví, SNTL Praha, 1971
- [16] Čalkovský, A.: Tenkostěnné konstrukce III, Dům techniky ČSVTS Praha, 1983
- [17] Belytschko,T., Liu,W.K., Moran,B.: Nonlinear finite elements for continua and structures, J.Wiley, 2000
- [18] Slavík,J., Stejskal,V., Zeman,V.: Základy dynamiky strojů, Vydavatelství ČVUT, Praha, 1997
- [19] Bittnar,Z., Řeřicha, MKP v dynamice konstrukcí, SNTL Praha, 1981
- [20] Argyris,J.H.: Energy theorems and Structural analysis, Butterworth, 1960 (reprint form Aircraft Eng. 1954-55)
- [21] Clough,R.W.: The finite element in plane stress analysis, Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, 1960
- [22] Brepta,R.: Rázy a vlny napětí v pevných elastických tělesech, Skriptum ČVUT Praha, 1977
- [23] Explicit dynamics with ANSYS LS-DYNA, ANSYS Training Manual, Copyright © 2003 SAS IP, Inc.

Stručný slovník základních pojmů MKP v mechanice těles

Část česko-anglická

adaptivní tvorba sítě	adaptive meshing
automatická tvorba nepravidelné sítě	free meshing
automatická tvorba pravidelné sítě	mapped meshing
bázová funkce	shape function
borcení	warping
boulení	buckling
Castiglianova věta	Castigliano's theorem
celková potenciální energie	total potential energy
číslo podmíněnosti	condition number
čtyřúhelníkový prvek	quadrilateral element
deformace	deformation
deska	plate
deviátor napětí	deviatoric stress
diskretizace	discretisation
dvouosý	biaxial
faktor intensity napětí	stress intensity factor
frontální metoda	frontal method
generátor sítě	mesh generator
geometrická matice tuhosti	geometric stiffness matrix
geometrické rovnice	strain-displacement relations
hlavní napětí, přetvoření	principal stress, strain
chyba diskretizace	discretisation error
iterace v podprostoru	subspace iteration
izoparametrický	isoparametric
izotropní zpevnění	isotropic hardening
jednoosý	uniaxial
kinematické zpevnění	kinematic hardening
kompatibilita, spojitost	compatibility
konstitutivní rovnice	constitutive equations
kontaktní prvky	contact elements
kontaktní prvky	gap elements

kontaktní prvky	interface elements
kontaktní prvky	joint elements
konvergence	convergence
krut	torsion
křehký	brittle
křivka životnosti, únavová křivka	S-N curve
kvadratické momenty plochy	area moments of inertia
lom	fracture
lomová mechanika	fracture mechanics
matice hmotnosti	mass matrix
matice poddajnosti	compliance matrix
matice tlumení	damping matrix
matice tuhosti	stiffness matrix
membrána	membrane
membránový, též stěnový prvek	membrane element
Metoda hraničních prvků	Boundary Element Method, BEM
Metoda konečných diferencí, met. sítě	Finite Difference Method
Metoda konečných prvků	Finite Element Method
mez kluzu	yield stress
mez pevnosti	strength limit, ultimate strength limit
mez únavy	fatigue limit
mezní podmínka max. smykových napětí	Tresca criterion, maximum shear stress crit.
mezní podmínka pružnosti	yield criterion
mezní podmínka pružnosti HMH	von Mises criterion
MKP	FEM
modální analýza	modal analysis
modální matice	modal matrix
modul pružnosti	modulus of elasticity
modul pružnosti ve smyku	shear modulus
Mohrova kružnice	Mohr's circle
moment	moment
napětí	stress
napěťová matice tuhosti	stress stiffness matrix
nekompatibilní prvky	incompatible elements
nestabilní deformace prvků sítě	hourglassing

nosník, prut namáhaný ohybem	beam
objemová síla	body force
ohybové (napětí, moment)	bending (stress, moment)
okrajové podmínky	boundary conditions
osová symetrie	axial symmetry
pásová matice	banded matrix
pevnost	strength
plasticita	plasticity
plasticita časově nezávislá	rate independent plasticity
plasticita časově závislá, viskoplasticita	rate dependent plasticity
podmínky kompatibility	compatibility equations
pohyb	motion
pohyb tuhého tělesa	rigid body motion
pohybové rovnice	equations of motion
Poissonovo číslo	Poisson's ratio
pokutová funkce	penalty function
poměr stran prvku	aspect ratio of element
posuv	displacement
poškození	damage
princip virtuální práce	principle of virtual work
problém vlastních hodnot	eigenproblem
prosté zatěžování	proportional loading
prostorový čtyřstěn (prvek)	tetrahedral element
prostorový šestistěn (prvek)	brick
průhyb	deflection
průřez	cross-section
pružinové prvky	spring elements
pružnost	elasticity
prvek	element
přechodový problém	transient problem
přetvoření, poměrná deformace	strain
příhradová konstrukce	pin-jointed frame structure
rám, rámový prvek	frame
rámová konstrukce	frame structure
reakce ve vazbách	reaction at supports

redukované napětí	equivalent stress
rotačně symetrická tělesa	solids of revolution
rotační vazba	pin-jointed support
rovinná napjatost, přetvoření	plane stress, strain
rovnice	equation
rovnice rovnováhy	equations of equilibrium
rovnováha	equilibrium
rychlost	velocity
síť konečných prvků	mesh, FE mesh
skořepina	shell
sloupcová matice pravé strany	right-hand side vector
sloupcová matice složek tenzoru napětí	stress vector
sloupcová matice složek tenzoru přetvoření	strain vector
sloupcová matice uzlových sil	nodal force vector
sloupcová matice zatížení	load vector
smyk	shear
smykové zablokování	shear locking
součinitel koncentrace napětí, tvarový souč.	stress concentration factor
spektrální matice	spectral matrix
staticky určitý, neurčitý, přeurlčený	statically determinate, indeter..., overdeter...
střed smyku	shear centre
střední napětí	mean stress
stupeň volnosti	d.o.f., degree of freedom
substruktura	substructure
špatná podmíněnost	ill-conditioning
tah	tension
tahová zkouška	tensile test
tahový diagram	stress-strain diagram, constitutive curve
tělesové prvky	solid elements
těžiště	centroid
tenkostěnný	thin-walled
tenzor	tensor
teplotní napětí	thermal stress
tlak (v ose prutu)	compression
tlak (v pneumatice)	pressure

trhlinové prvky	crack-tip elements
trojúhelníkový prvek	triangular element
tuhé prvky	rigid elements
tuhost	stiffness
tyč, prut namáhaný pouze tahem	bar, truss
únava	fatigue
uzel	node
variační počet	calculus of variations
vazba, omezení	constraint
vazba, podpora	support
vektor napětí	stress vector
vetknutý nosník	cantilever beam
viskoplasticita, plasticita časově závislá	viscoplasticity, rate dependent plasticity
vlastní hodnota, vlastní číslo	eigenvalue
Youngův modul	Young's modulus
zablokování sítě	mesh locking
zatížení	loading
zjemnění sítě	mesh refinement
zkos	shear strain
zpevnění	hardening
zrychlení	acceleration

Stručný slovník základních pojmů MKP v mechanice těles

Část anglicko-česká

acceleration	zrychlení
adaptive meshing	adaptivní tvorba sítě
area moments of inertia	kvadratické momenty plochy
aspect ratio of element	poměr stran prvku
axial symmetry	osová symetrie
banded matrix	pásová matice
bar, truss	tyč, prut namáhaný pouze tahem
beam	nosník, prut namáhaný ohybem
bending (stress, moment)	ohybové (napětí, moment)
biaxial	dvouosý
body force	objemová síla
boundary conditions	okrajové podmínky
Boundary Element Method, BEM	Metoda hraničních prvků
brick	prostorový šestistěn (prvek)
brittle	křehký
buckling	boulení, vybočení při ztrátě stability
calculus of variations	variační počet
cantilever beam	vetknutý nosník
Castigliano's theorem	Castiglianova věta
centroid	těžiště
compatibility	kompatibilita, spojitost
compatibility equations	podmínky kompatibility
compliance matrix	matice poddajnosti
compression	tlak (v ose prutu)
condition number	číslo podmíněnosti
constitutive equations	konstitutivní rovnice
constraint	vazba, omezení
contact elements	kontaktní prvky
convergence	konvergence
crack-tip elements	trhlinové prvky
cross-section	průřez

d.o.f., degree of freedom	stupeň volnosti
damage	poškození
damping matrix	matice tlumení
deflection	průhyb
deformation	deformace
degree of freedom, d.o.f.	stupeň volnosti
deviatoric stress	deviátor napětí
discretisation	diskretizace
discretisation error	chyba diskretizace
displacement	posuv
eigenproblem	problém vlastních hodnot
eigenvalue	vlastní hodnota, vlastní číslo
elasticity	pružnost
element	prvek
equation	rovnice
equations of equilibrium	rovnice rovnováhy
equations of motion	pohybové rovnice
equilibrium	rovnováha
equivalent stress	redukované napětí
fatigue	únava
fatigue limit	mez únavy
FEM	MKP
Finite Difference Method	Metoda konečných diferencí, met. sítí
Finite Element Method	Metoda konečných prvků
fracture	lom
fracture mechanics	lomová mechanika
frame	rám, rámový prvek
frame structure	rámová konstrukce
free meshing	automatická tvorba nepravidelné sítě
frontal method	frontální metoda
gap elements	kontaktní prvky
geometric stiffness matrix	geometrická matice tuhosti
hardening	zpevnění
hourglassing	nestabilní deformace prvků sítě
ill-conditioning	špatná podmíněnost

incompatible elements	nekompatibilní prvky
interface elements	kontaktní prvky
isoparametric	izoparametrický
isotropic hardening	izotropní zpevnění
joint elements	kontaktní prvky
kinematic hardening	kinematické zpevnění
load vector	sloupcová matice zatížení
loading	zatížení
mapped meshing	automatická tvorba pravidelné sítě
mass matrix	matice hmotnosti
maximum shear stress criterion, Tresca crit.	mezní podmínka max. smykových napětí
mean stress	střední napětí
membrane	membrána
membrane element	membránový, též stěnový prvek
mesh generator	generátor sítě
mesh locking	zablokování sítě
mesh refinement	zjemnění sítě
mesh, FE mesh	sít' konečných prvků
modal analysis	modální analýza
modal matrix	modální matice
modulus of elasticity	modul pružnosti
Mohr's circle	Mohrova kružnice
moment	moment
motion	pohyb
nodal force vector	sloupcová matice uzlových sil
node	uzel
penalty function	pokutová funkce
pin-jointed frame structure	příhradová konstrukce
pin-jointed support	rotační vazba
plane stress, strain	rovinná napjatost, přetvoření
plasticity	plasticita
plate	deska
Poisson's ratio	Poissonovo číslo
pressure	tlak (v pneumatice)
principal stress, strain	hlavní napětí, přetvoření

principle of virtual work	princip virtuální práce
proportional loading	prosté zatěžování
quadrilateral element	čtyřúhelníkový prvek
rate dependent plasticity	plasticita časově závislá, viskoplasticita
rate independent plasticity	plasticita časově nezávislá
reaction at supports	reakce ve vazbách
right-hand side vector	sloupcová matice pravé strany
rigid body motion	pohyb tuhého tělesa
rigid elements	tuhé prvky
shape function	bázová funkce
shear	smyk
shear centre	střed smyku
shear locking	smykové zablokování
shear modulus	modul pružnosti ve smyku
shear strain	zkos
shell	skořepina
S-N curve	křivka životnosti, únavová křivka
solid elements	tělesové prvky
solids of revolution	rotačně symetrická tělesa
spectral matrix	spektrální matice
spring elements	pružinové prvky
statically determinate, indeter..., overdeter...	staticky určitý, neurčitý, přeúčtený
stiffness	tuhost
stiffness matrix	matice tuhosti
strain	přetvoření, poměrná deformace
strain vector	sloupcová matice složek tenzoru přetvoření
strain-displacement relations	geometrické rovnice
strength	pevnost
strength limit, ultimate strenght limit	mez pevnosti
stress	napětí
stress concentration factor	součinitel koncentrace napětí, tvarový souč.
stress intensity factor	faktor intensity napětí
stress stiffness matrix	napěťová matice tuhosti
stress vector	vektor napětí, <i>častěji</i> : sloupcová matice složek tenzoru napětí

stress-strain diagram, constitutive curve	tahový diagram
subspace iteration	iterace v podprostoru
substructure	substruktura
support	vazba, podpora
tensile test	tahová zkouška
tension	tah
tensor	tenzor
tetrahedral element	prostorový čtyřstěn (prvek)
thermal stress	teplotní napětí
thin-walled	tenkostěnný
torsion	krut
total potential energy	celková potenciální energie
transient problem	přechodový problém
Tresca criterion, maximum shear stress crit.	mezní podmínka max. smykových napětí
triangular element	trojúhelníkový prvek
truss, bar	tyč, prut namáhaný pouze tahem
uniaxial	jednoosý
velocity	rychlost
von Mises criterion	mezní podmínka pružnosti HMH
warping	borcení
yield criterion	mezní podmínka pružnosti
yield stress	mez kluzu
Young's modulus	Youngův modul