Srovnání modelů materiálu

Zadání

Těleso o rozměrech 1×2×10 mm je deformačně zatěžováno ve směru nejdelší strany ($l = 10$ mm) tak, že je v prvním kroku stlačeno o $u = -0,03$ mm a poté natahováno zpět do původního rozměru. Určete napětí v tělese, elastické a plastické přetvoření, když použijete tyto modely materiálu:

1. ideálně pružně-plastický
2. bilineární s kinematickým zpevněním
3. bilineární s izotropním zpevněním

Konstanty určující vlastnosti materiálu jsou: $E = 210000$ MPa, $\mu = 0,3$, $\sigma_k = 200$ MPa, $E_{\tan} = 10000$ MPa.

Odvození

Ideálně pružně-plastický materiál

Při prvním kroku platí pro celkové přetvoření

$$\varepsilon_{t1} = \frac{u}{l}.$$

Napětí je

$$\sigma_1 = -\sigma_k \quad \text{pro} \quad \varepsilon_{t1} < -\frac{\sigma_k}{E},$$

tedy když je překročena mez kluzu. Elastické přetvoření se určí

$$\varepsilon_{el1} = \frac{\sigma_1}{E}$$

a plastické pak je

$$\varepsilon_{pl1} = \varepsilon_{t1} - \varepsilon_{el1}.$$

Při druhém kroku je celkové přetvoření nulové. Podle toho, zda dojde či nedojde při natahování zpět do původní délky k dosažení meze kluzu, je napětí

$$\sigma_2 = \begin{cases} -\sigma_k + E \cdot \left(\varepsilon_{t2} - \varepsilon_{t1}\right) & \text{pro} \quad \varepsilon_{t2} - \varepsilon_{t1} \le \dfrac{2 \cdot \sigma_k}{E} \\ \sigma_k & \text{pro} \quad \varepsilon_{t2} - \varepsilon_{t1} > \dfrac{2 \cdot \sigma_k}{E} \end{cases}$$

Elastické a plastické přetvoření se určí stejně jako v prvním kroku, tedy

$$\varepsilon_{el2} = \frac{\sigma_2}{E}$$

$$\varepsilon_{pl2} = \varepsilon_{t2} - \varepsilon_{el2}$$

Bilineární materiál s kinematickým zpevněním

Při prvním kroku platí pro celkové přetvoření

$$\varepsilon_{t1} = \frac{u}{l}.$$

Napětí je

$$\sigma_1 = -\sigma_k + E_{\tan} \cdot \left[\varepsilon_{t1} - \left(-\frac{\sigma_k}{E} \right) \right] \quad \text{pro} \quad \varepsilon_{t1} < -\frac{\sigma_k}{E},$$

tedy když je překročena mez kluzu. Elastické přetvoření se určí

$$\varepsilon_{el1} = \frac{\sigma_1}{E}$$

a plastické pak je

$$\varepsilon_{pl1} = \varepsilon_{t1} - \varepsilon_{el1}.$$

Při druhém kroku je celkové přetvoření nulové. Do napětí už se na rozdíl od ideálně pružně-plastického materiálu musí započítat zpevnění po mezi kluzu

$$\sigma_2 = \begin{cases} \sigma_1 + E \cdot \left(\varepsilon_{t2} - \varepsilon_{t1} \right) & \text{pro} \quad \varepsilon_{t2} - \varepsilon_{t1} \le \dfrac{2 \cdot \sigma_k}{E} \\ \sigma_1 + 2 \cdot \sigma_k + E_{\tan} \cdot \left(\varepsilon_{t2} - \varepsilon_{t1} - \dfrac{2 \cdot \sigma_k}{E} \right) & \text{pro} \quad \varepsilon_{t2} - \varepsilon_{t1} > \dfrac{2 \cdot \sigma_k}{E} \end{cases}$$

Elastické a plastické přetvoření se určí stejně jako v prvním kroku, tedy

$$\varepsilon_{el2} = \frac{\sigma_2}{E}$$

$$\varepsilon_{pl2} = \varepsilon_{t2} - \varepsilon_{el2}$$

Bilineární materiál s izotropním zpevněním

Při prvním kroku platí pro celkové přetvoření

$$\varepsilon_{t1} = \frac{u}{l}.$$

Napětí v prvním kroku je stejné jako v případě kinematického zpevnění

$$\sigma_1 = -\sigma_k + E_{\tan} \cdot \left[\varepsilon_{t1} - \left(-\frac{\sigma_k}{E} \right) \right] \quad \text{pro} \quad \varepsilon_{t1} < -\frac{\sigma_k}{E},$$

Elastické přetvoření se určí

$$\varepsilon_{el1} = \frac{\sigma_1}{E}$$

a plastické pak je

$$\varepsilon_{pl1} = \varepsilon_{t1} - \varepsilon_{el1}.$$

Při druhém kroku je celkové přetvoření nulové. Při izotropním zpevnění se mění mez kluzu. Nová mez kluzu je

$$\sigma_{k2} = \left| \sigma_1 \right|$$

Napětí v druhém kroku se pak určí

$$\sigma_2 = \begin{cases} \sigma_1 + E \cdot \left(\varepsilon_{t2} - \varepsilon_{t1} \right) & \text{pro} \quad \varepsilon_{t2} - \varepsilon_{t1} \le \dfrac{2 \cdot \sigma_{k2}}{E} \\ \sigma_1 + 2 \cdot \sigma_{k2} + E_{\tan} \cdot \left(\varepsilon_{t2} - \varepsilon_{t1} - \dfrac{2 \cdot \sigma_{k2}}{E} \right) & \text{pro} \quad \varepsilon_{t2} - \varepsilon_{t1} > \dfrac{2 \cdot \sigma_{k2}}{E} \end{cases}$$

Elastické a plastické přetvoření se určí stejně jako v prvním kroku, tedy

$$\varepsilon_{el2} = \frac{\sigma_2}{E}$$

$$\varepsilon_{pl2} = \varepsilon_{t2} - \varepsilon_{el2}$$

Výsledky

Pro porovnání s analytickým řešením byly použity výpočty v ANSYSu, kdy úloha byla řešena dvojím způsobem – bez uvažování velkých posuvů, kdy byl vypočítán pouze první krok, druhý už nezkonvergoval, a s jejich uvažováním, kdy výpočty proběhly v pořádku.

IDEÁLNĚ PRUŽNĚ PLASTICKÝ MATERIÁL			
Krok 1	σ_1 [MPa]	ε_{el1} [–]	ε_{pl1} [–]
Analytické řešení	– 200	$-0{,}9524 \cdot 10^{-3}$	$-2{,}0476 \cdot 10^{-3}$
ANSYS (malá přetvoření)	– 200	$-0{,}9524 \cdot 10^{-3}$	$-2{,}0476 \cdot 10^{-3}$
ANSYS (velká přetvoření)	– 200	$-0{,}9524 \cdot 10^{-3}$	$-2{,}0521 \cdot 10^{-3}$
Krok 2	σ_1 [MPa]	ε_{el1} [–]	ε_{pl1} [–]
Analytické řešení	200	$0{,}9524 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}9524 \cdot 10^{-3}$
ANSYS (velká přetvoření)	200	$0{,}9524 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}9524 \cdot 10^{-3}$
BILINEÁRNÍ MATERIÁL S KINEMATICKÝM ZPEVNĚNÍM			
Krok 1	σ_1 [MPa]	ε_{el1} [–]	ε_{pl1} [–]
Analytické řešení	– 220,476	$-1{,}0499 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}9501 \cdot 10^{-3}$
ANSYS (malá přetvoření)	– 220,476	$-1{,}0499 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}9501 \cdot 10^{-3}$
ANSYS (velká přetvoření)	– 220,521	$-1{,}0501 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}9541 \cdot 10^{-3}$
Krok 2	σ_1 [MPa]	ε_{el1} [–]	ε_{pl1} [–]
Analytické řešení	190,476	$0{,}9070 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}9070 \cdot 10^{-3}$
ANSYS (velká přetvoření)	190,476	$0{,}9070 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}9070 \cdot 10^{-3}$
BILINEÁRNÍ MATERIÁL S IZOTROPNÍM ZPEVNĚNÍM			
Krok 1	σ_1 [MPa]	ε_{el1} [–]	ε_{pl1} [–]
Analytické řešení	– 220,476	$-1{,}0499 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}9501 \cdot 10^{-3}$
ANSYS (malá přetvoření)	– 220,476	$-1{,}0499 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}9501 \cdot 10^{-3}$
ANSYS (velká přetvoření)	– 220,521	$-1{,}0501 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}9541 \cdot 10^{-3}$
Krok 2	σ_1 [MPa]	ε_{el1} [–]	ε_{pl1} [–]
Analytické řešení	229,478	$1{,}0927 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}0927 \cdot 10^{-3}$
ANSYS (velká přetvoření)	229,564	$1{,}0932 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}0932 \cdot 10^{-3}$

Výsledky prvního kroku z ANSYSu při uvažování velkých posuvů se liší od analytického řešení. Je to způsobeno tím, že při těchto výpočtech se po každém kroku upravuje tvar tělesa podle toho, jak se deformuje, zatímco při analytickém řešení se vychází z původních rozměrů. Při natahování zpět do původního tvaru už se ovšem výsledky ideálně pružně plastického materiálu a materiálu s kinematickým zpevněním opět shodují, protože tvar tělesa je už stejný jako na začátku zatěžování a mez kluzu se nemění. Naopak u materiálu s izotropním zpevněním se změnila mez kluzu a hodnota nové meze kluzu se obou řešení liší, proto jsou jiné i výsledky v druhém kroku.

Při použití ideálně pružně-plastického materiálu nemůže být překročena mez kluzu. Při jejím dosažení dochází k tečení materiálu. Při silovém zatěžování a použití tohoto dochází při úplném zplastizování k divergenci řešení. Z tohoto důvodu bývá vhodnější použít bilineární model. Tento jednak zamezí této divergenci, jednak zohledňuje zpevňování materiálu. Pohybujeme-li se pouze v tahové nebo pouze v tlakové oblasti, je chování materiálu s kinematickým a s izotropním zpevněním totožné. Při přechodu z tahové do tlakové oblasti namáhání nebo opačně, jejich vlastnosti se liší. U materiálu s izotropním zpevněním dochází ke zvyšování meze kluzu, u materiálu s kinematickým zpevněním se posouvá mez kluzu podle posledního zplastizování.