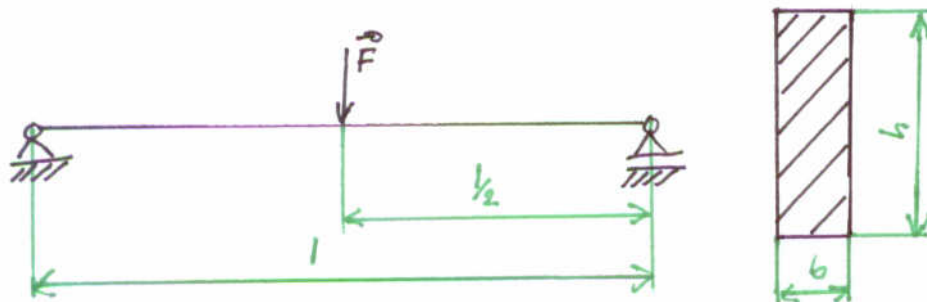


Modelování třibodového ohybu s plastizováním

Zadání

Průřez prutu je obdélníkový o rozměrech $b = 0,01$ m, $h = 0,03$ m. Vzdálenost podpor je $l = 2$ m, síla F působí ve středu prutu. Materiál je ideálně pružně-plastický s vlastnostmi $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Pa, $\mu = 0,3$, $\sigma_k = 200$ MPa

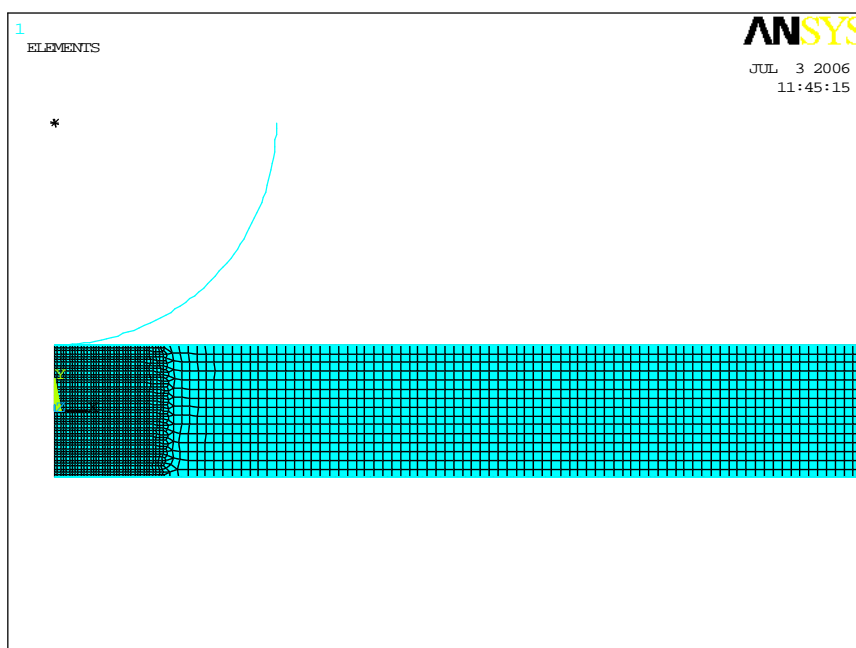


Obr. 1. Zadání

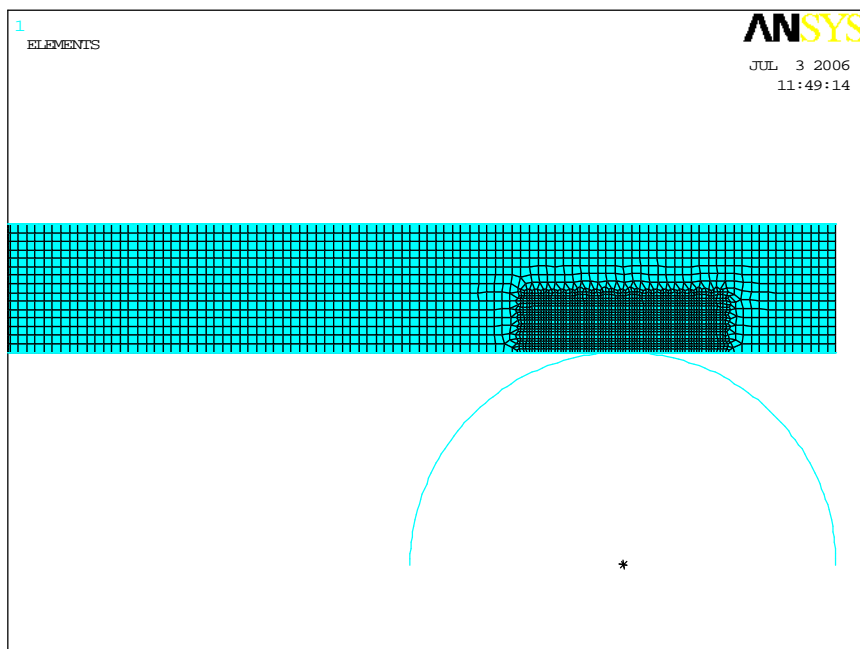
Prut byl zatěžován deformačně ve dvou krocích. Nejprve byl zadán posuv 0,1 m a poté byl odlehčen pro zjištění zbytkové napjatosti.

Modelování v ANSYSu

Prut byl modelován jako rovinné těleso s využitím prvku PLANE82 s rovinnou napjatostí a zadanou tloušťkou b . Při tvorbě modelu bylo využito symetrie, je tak modelována pouze polovina prutu, podpory a působení síly jsou modelovány jako kontakt s tuhým tělesem s pilotním uzlem.



Obr. 2. Prvky ve středu prutu



Obr. 3. Prvky v oblasti podpor

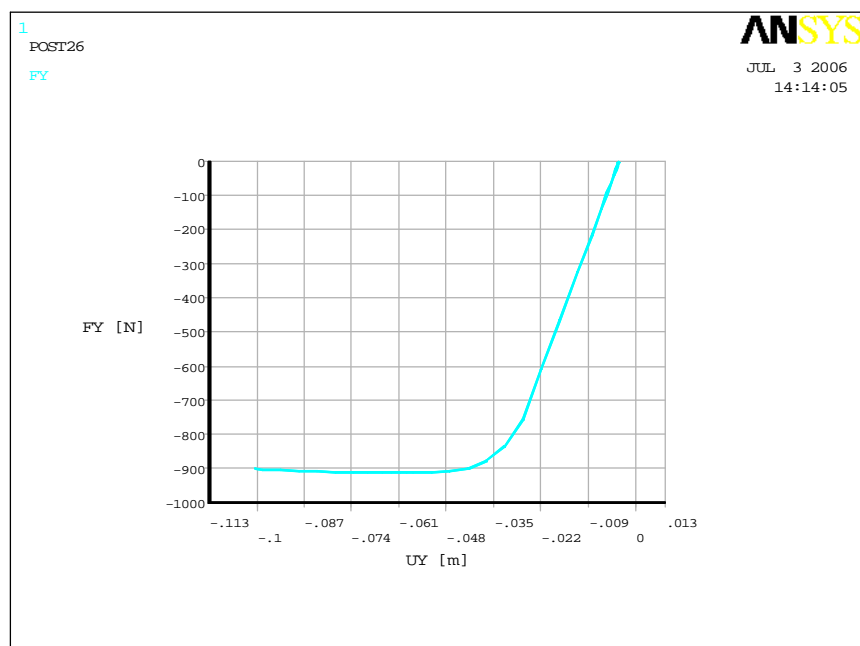
Závislost zatěžující síly na průhybu

Závislost síly F_y na průhybu u_y je lineární, dokud není dosaženo meze kluzu. To nastane při velikosti působící síly

$$F_y = \frac{4 \cdot \sigma_k \cdot W_o}{l} = 600 \text{ N}$$

Odpovídá tomu průhyb

$$u_y = \frac{F_y \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot J} = 0,0212 \text{ m}$$



Obr. 4. Závislost působící síly na průhybu

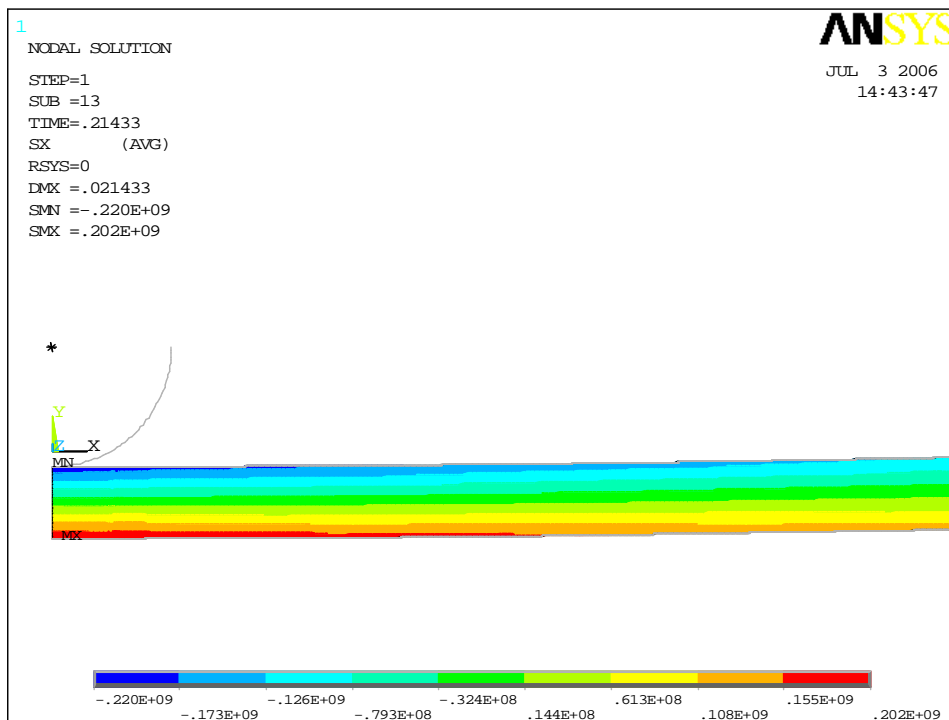
K úplnému zplastizování průřezu a vzniku plastického kloubu dochází při použití ideálně pružně-plastického materiálu při 1,5 násobku momentu vyvolávající první plastickou deformaci. Totéž platí i pro působící sílu. Plastický kloub tedy vznikne *při působení sílou* o velikosti **900 N**.

Rozložení napětí

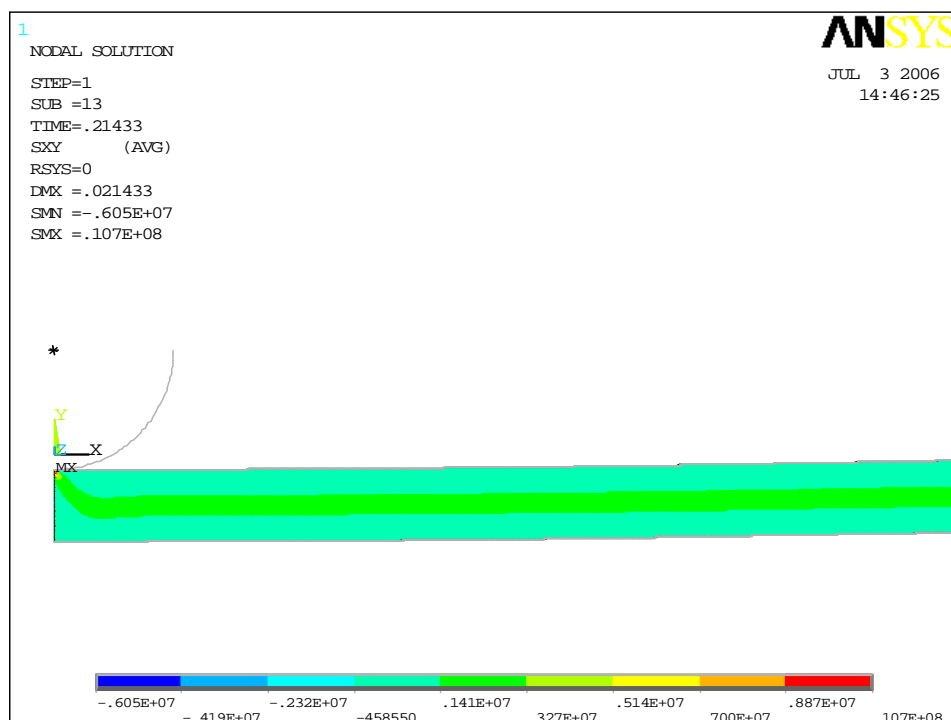
V této části jsou výsledky rozložení napětí vypočítané v ANSYSu pro zatížení, které odpovídá zátěži na mezi pružnosti, okamžiku vzniku plastického kloubu, při maximálním zadaném průhybu, kdy je významná plastizace v oblasti plastického kloubu, a po odlehčení, kdy je objektem zájmu zbytková napjatost.

Maximální elastické přetvoření

Výsledky při napětí na mezi pružnosti. Zatěžující síla má velikost 600 N a způsobuje průhyb 0,0212 mm. Průběh normálového napětí podle směru osy y je lineární a jeho maximální velikost se snižuje se přímo úměrně vzdálenosti od působíště síly, stejně jako ohybový moment. Smykové napětí má parabolický průběh (podle Žuravského vztahu), pouze v oblasti ovlivněné kontaktem směřuje pod úhlem 45° oblast špičky napětí z kontaktní plochy.



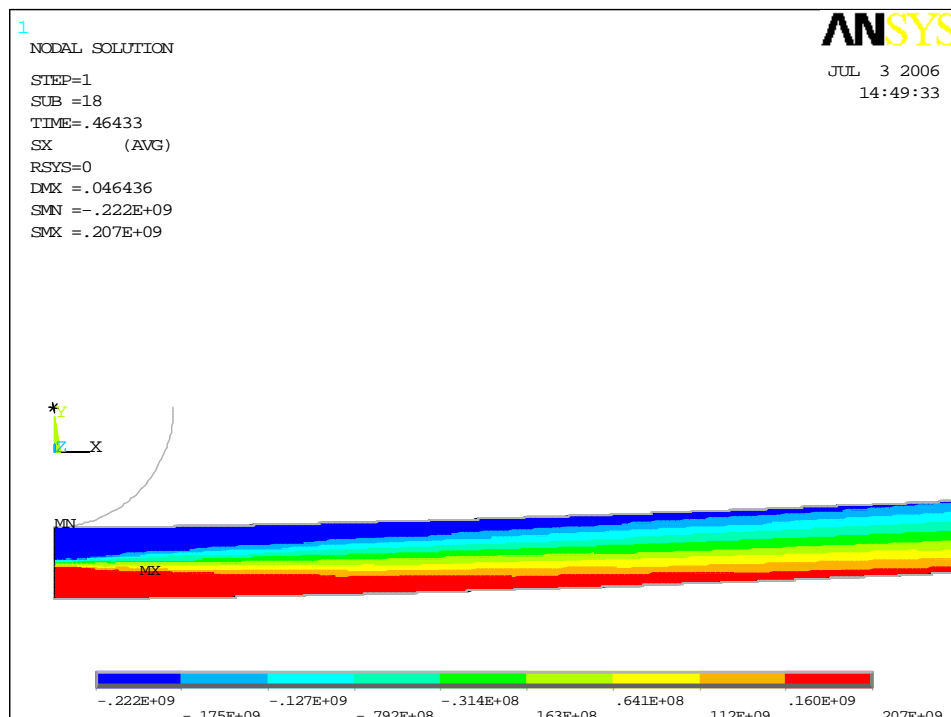
Obr. 5. Rozložení normálového napětí σ_x při dosažení mezního stavu pružnosti



Obr. 6. Rozložení smykového napětí τ_{xy} při dosažení mezního stavu pružnosti

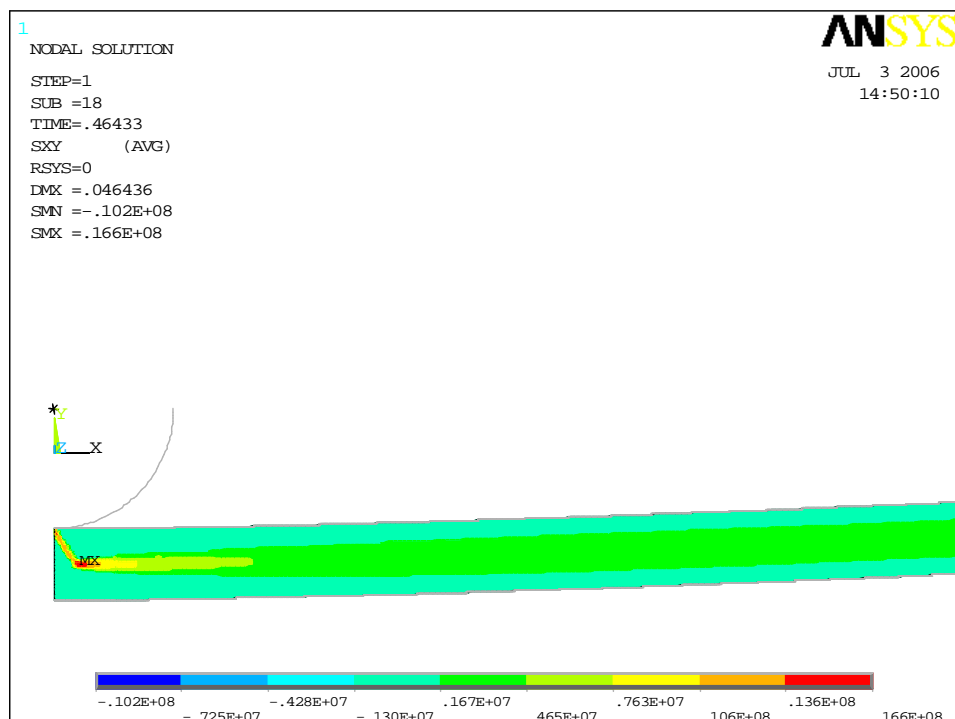
Vznik plastického kloubu

Při vzniku plastického kloubu je v místě největšího momentu, v tomto případě pod zatěžujícím kontaktem, zplastizovaný celý průřez prutu. Pro daný prut toto nastává v okamžiku, když síla dosáhne velikosti 900 N, průhyb v tento okamžik má velikost 0,045 m.

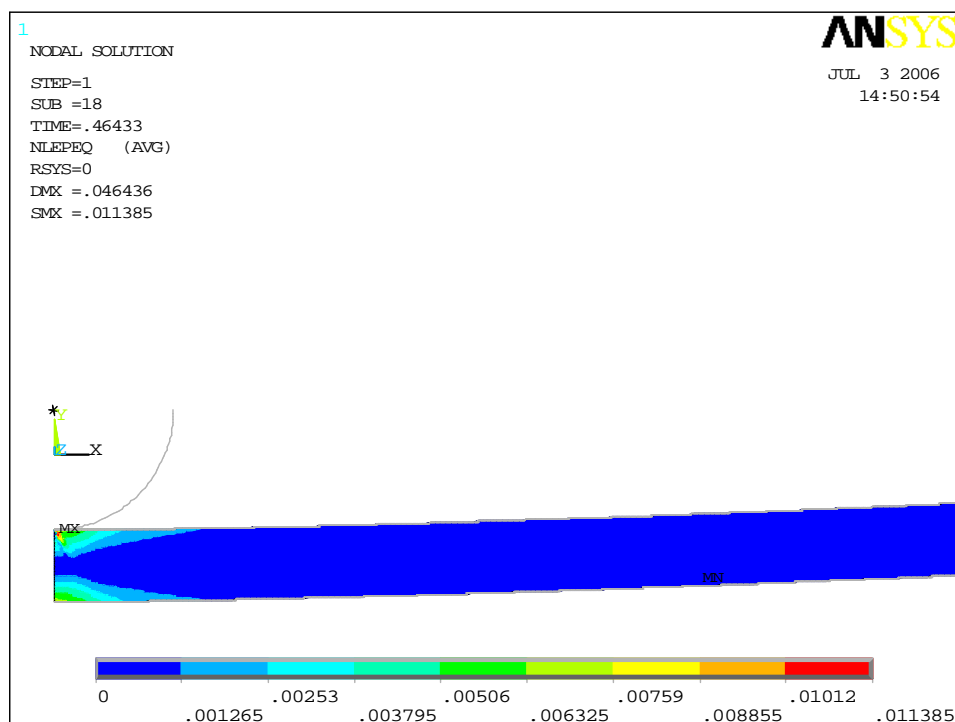


Obr. 7. Rozložení normálového napětí σ_x při vzniku plastického kloubu

Při vzniku plastického kloubu je normálové napětí bod působící silou na mezi kluzu, v horní polovině průřezu v tlakové, v dolní polovině v tahové oblasti, přičemž přechod mezi nimi je takřka skokový. Dále, v pružně-plastické oblasti, se postupně rozšiřuje pás, v němž napětí nedosahuje meze kluzu, až nakonec k plastické deformaci nedochází.



Obr. 8. Rozložení smykového napětí τ_{xy} při vzniku plastického kloubu

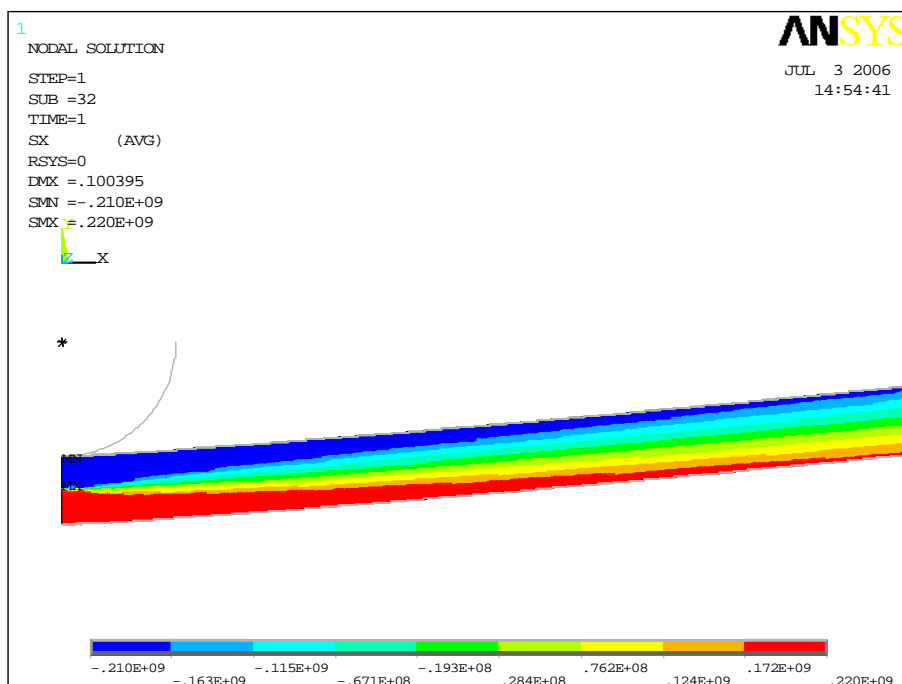


Obr. 9. Rozložení redukovaného přetvoření (podle HMH) při vzniku plastického kloubu

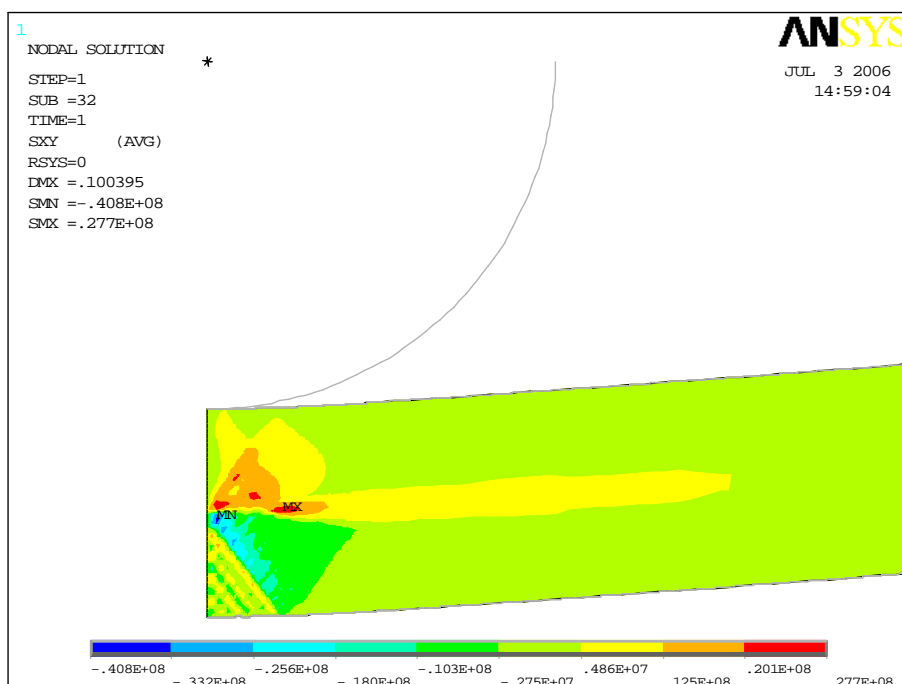
V oblasti plastizace, pokud platí prutové předpoklady (mimo kontakt), je smykové napětí nulové. Proto v oblasti pružně-plastické deformace vzniká špička smykového napětí, protože působení posouvající síly musí unést menší část průřezu.

Plastická deformace je největší právě v oblasti plastického kloubu a zmenšuje se směrem k neutrální ose a s rostoucí vzdáleností od působiště síly po délce prutu.

Maximální zvolený průhyb

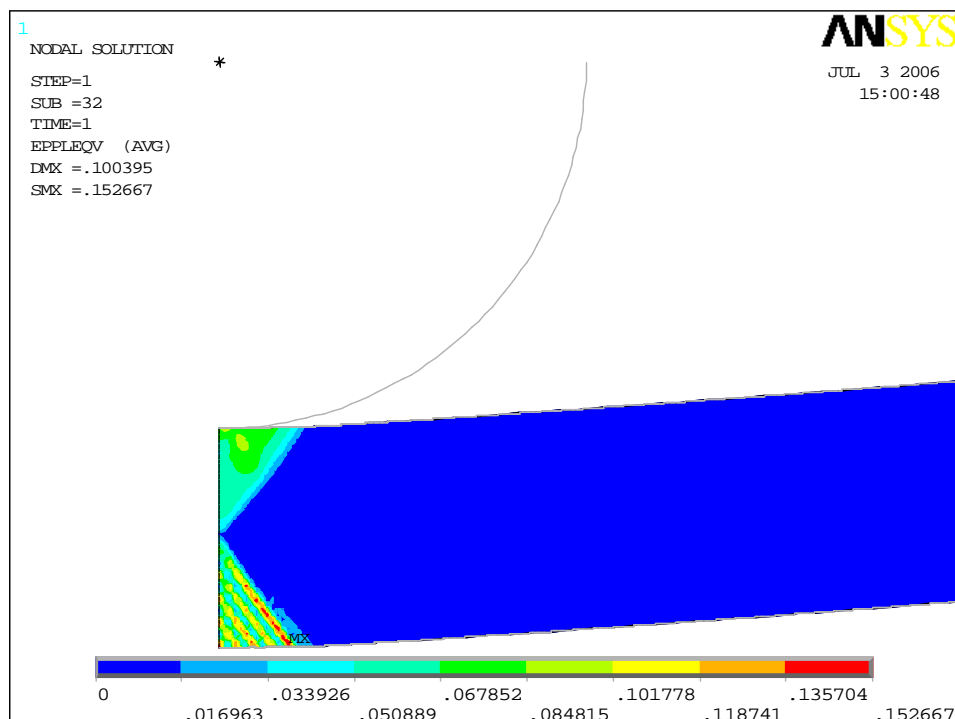


Obr. 10. Rozložení normálového napětí σ_x při maximálním průhybu



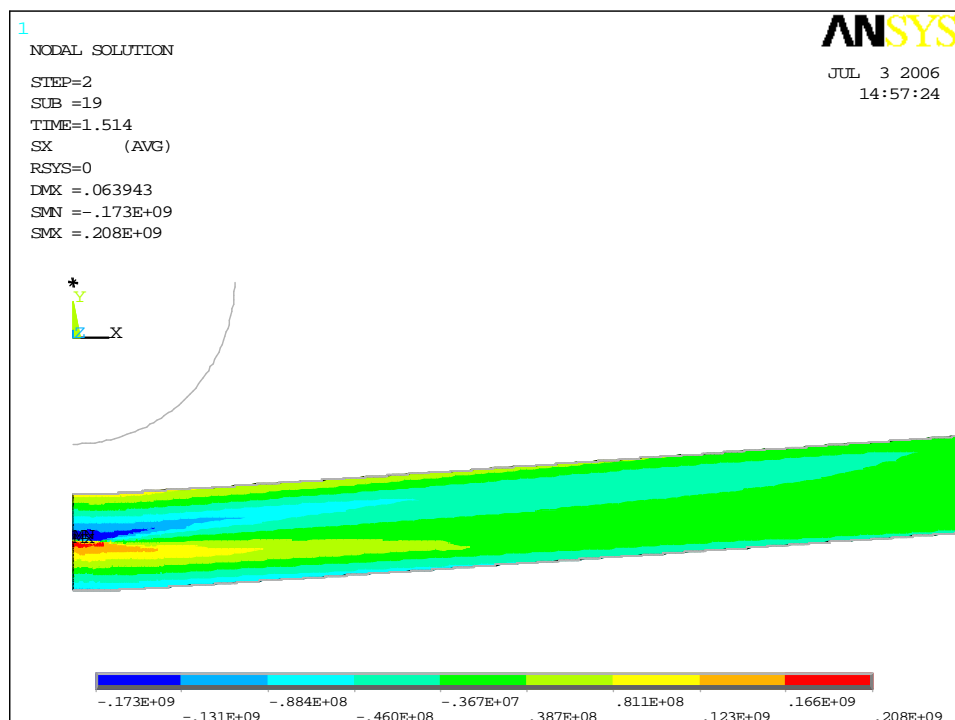
Obr. 11. Rozložení smykového napětí τ_{xy} při maximálním průhybu

Tomuto okamžiku odpovídá průhyb 0,1 m. Zatěžující síla má stále velikost 900 N. Normálová napjatost se od vzniku plastického kloubu nemění. Všechny změny, které nově vznikají se zvětšujícím se průhybem, se odehrávají právě v oblasti plastického kloubu. V něm přestávají platit prutové předpoklady, roste plastická deformace a smykové napětí.



Obr. 12. Rozložení redukovaného přetvoření (podle HMH) při maximálním průhybu

Zbytková napjatost



Obr. 13. Rozložení normálového napětí σ_x po odlehčení

Po odlehčení se v důsledku plastického přetvoření v prutu zachovává zbytková napjatost, která má pilovitý průběh.

Průběhy napětí a přetvoření po průřezu v pružně-plastické oblasti

Odvození analytických vztahů

Průběh napětí na průřezu má dvě části – pružnou a plastickou. V pružné části se napětí lineárně zvětšuje od nuly na neutrálné ose po mez kluzu ve vzdálenosti h_1 a dále zůstává na mezi kluzu. Průběh napětí tedy je

$$\sigma = \begin{cases} \frac{\sigma_k}{h_1} \cdot z & \text{pro } z = 0 \dots h_1 \\ \sigma_k & \text{pro } z = h_1 \dots \frac{h}{2} \end{cases}$$

a je symetrický podle neutrálné osy.

Pro ohybový moment v daném průřezu pak platí:

$$M_o = 2 \cdot b \cdot \left(\int_0^{h_1} \sigma_{el}(z) \cdot z \cdot dz + \int_{h_1}^{\frac{h}{2}} \sigma_{pl}(z) \cdot z \cdot dz \right)$$

$$M_o = 2 \cdot b \cdot \left(\int_0^{h_1} \frac{\sigma_k}{h_1} \cdot z \cdot z \cdot dz + \int_{h_1}^{\frac{h}{2}} \sigma_k \cdot z \cdot dz \right)$$

$$M_o = 2 \cdot b \cdot \sigma_k \cdot \left(\frac{1}{h_1} \cdot \int_0^{h_1} z^2 \cdot dz + \int_{h_1}^{\frac{h}{2}} z \cdot dz \right)$$

$$M_o = 2 \cdot b \cdot \sigma_k \cdot \left(\frac{h_1^2}{3} + \frac{h^2}{8} - \frac{h_1^2}{2} \right)$$

$$M_o = b \cdot \sigma_k \cdot \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{3} \right)$$

Odtud je při známém momentu h_1 :

$$h_1 = \sqrt{\frac{3 \cdot h^2}{4} - \frac{3 \cdot M_o}{\sigma_k \cdot b}}$$

Pro celkové přetvoření ε_t platí:

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_k}{h_1 \cdot E} \cdot z$$

Elastické přetvoření ε_{el} je:

$$\varepsilon_{el} = \begin{cases} \varepsilon_t & \text{pro } z = 0 \dots h_1 \\ \frac{\sigma_k}{E} & \text{pro } z = h_1 \dots \frac{h}{2} \end{cases}$$

Plastické přetvoření ε_{pl} :

$$\varepsilon_{pl} = \begin{cases} 0 & \text{pro } z = 0 \dots h_1 \\ \varepsilon_t - \frac{\sigma_k}{E} & \text{pro } z = h_1 \dots \frac{h}{2} \end{cases}$$

Odvození průběhů napětí a přetvoření při odlehčení

Při odlehčování se uvažuje, že k momentu M_o , kterým je prut zatížen, je přidán stejný moment, ovšem opačně orientovaný. Pro použité řešení předpokládáme, že při odlehčení nedojde k další plastizaci, závislost napětí na momentu $-M_o$ je tedy elastická. Pak platí:

$$\sigma_E = -\frac{M_o}{J} \cdot z$$

a

$$\sigma_R = \sigma + \sigma_E$$

$$\sigma_R = \begin{cases} \left(\frac{\sigma_k}{h_1} - \frac{M_o}{J} \right) \cdot z & \text{pro } z = 0 \dots h_1 \\ \sigma_k - \frac{M_o}{J} \cdot z & \text{pro } z = h_1 \dots \frac{h}{2} \end{cases}$$

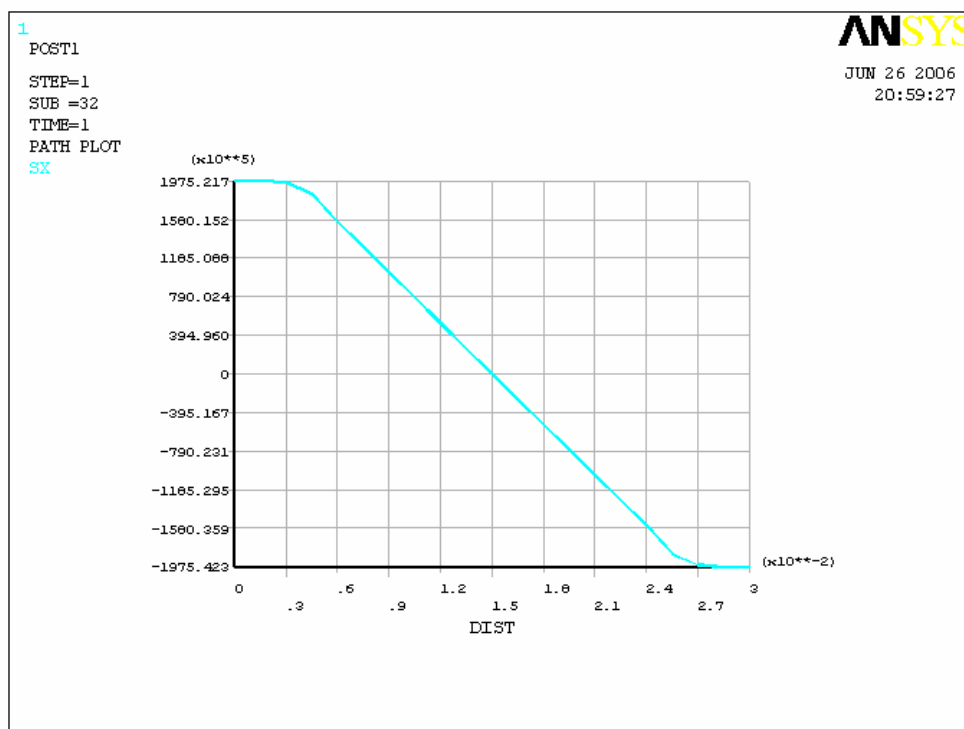
Pokud k další plastizaci nedojde, plastické přetvoření ε_{pl} se nezmění. Elastické přetvoření ε_{el} je

$$\varepsilon_{el} = \frac{\sigma_R}{E}$$

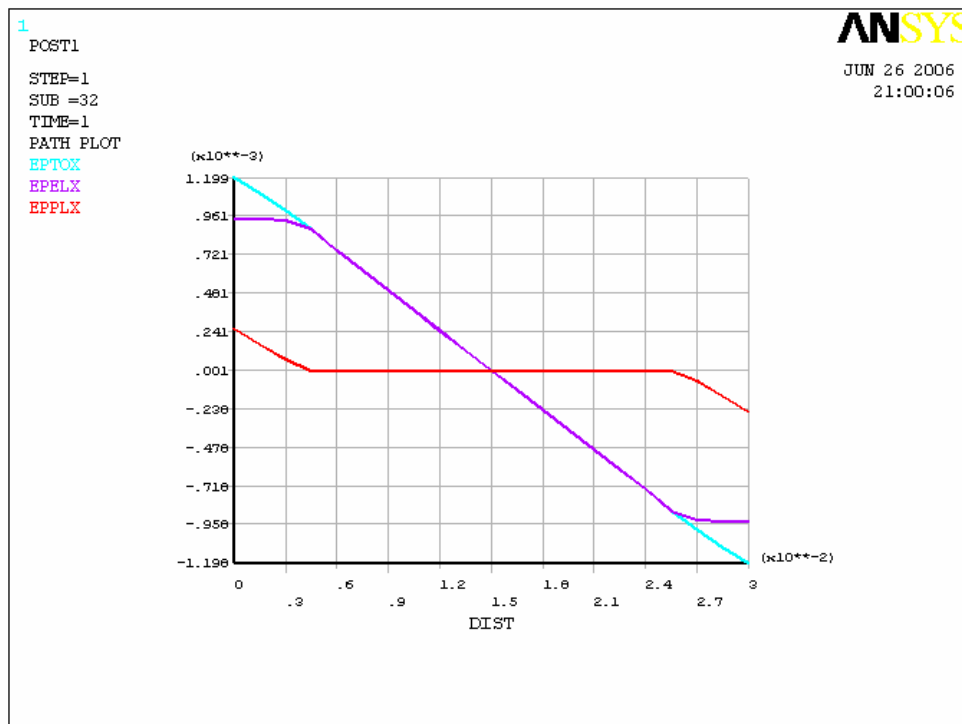
a celkové přetvoření ε_t :

$$\varepsilon_t = \varepsilon_{pl} + \varepsilon_{el}$$

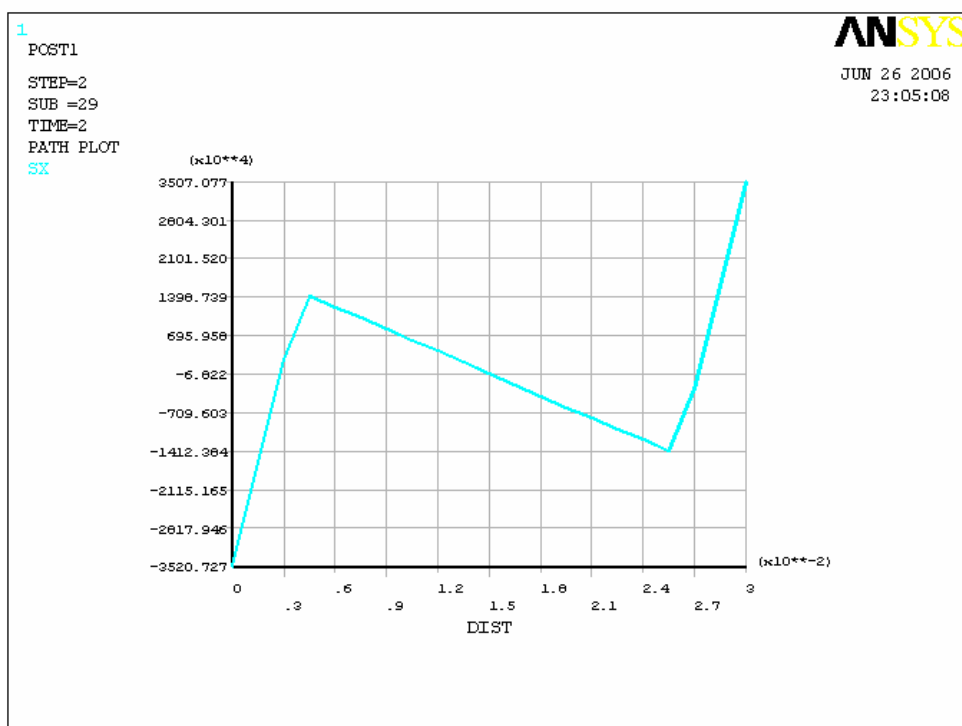
Výsledky z ANSYSu



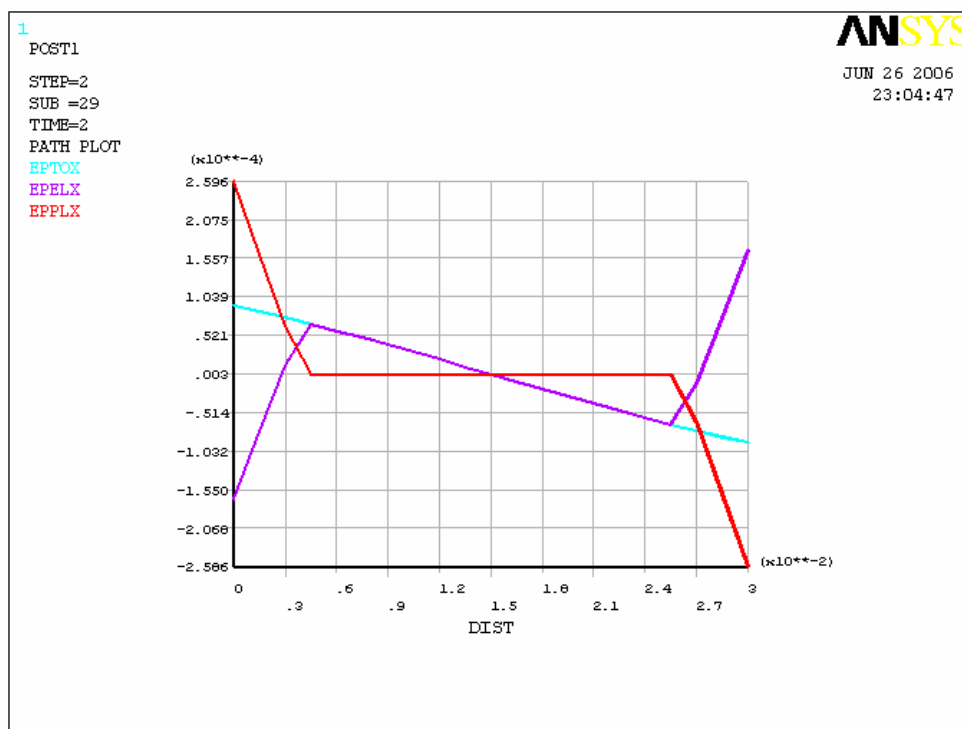
Obr. 14. Průběh napětí podle osy y při zatížení



Obr. 15. Průběh přetvoření při zatížení

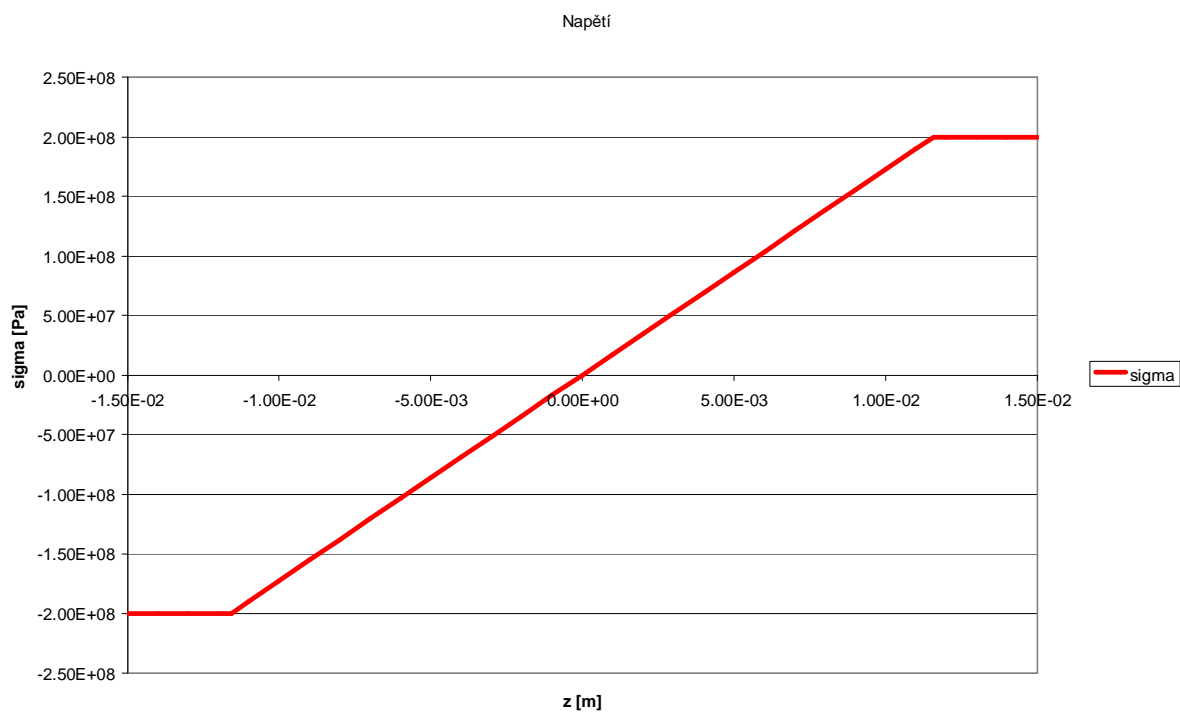


Obr. 16. Průběh napětí při odlehčení

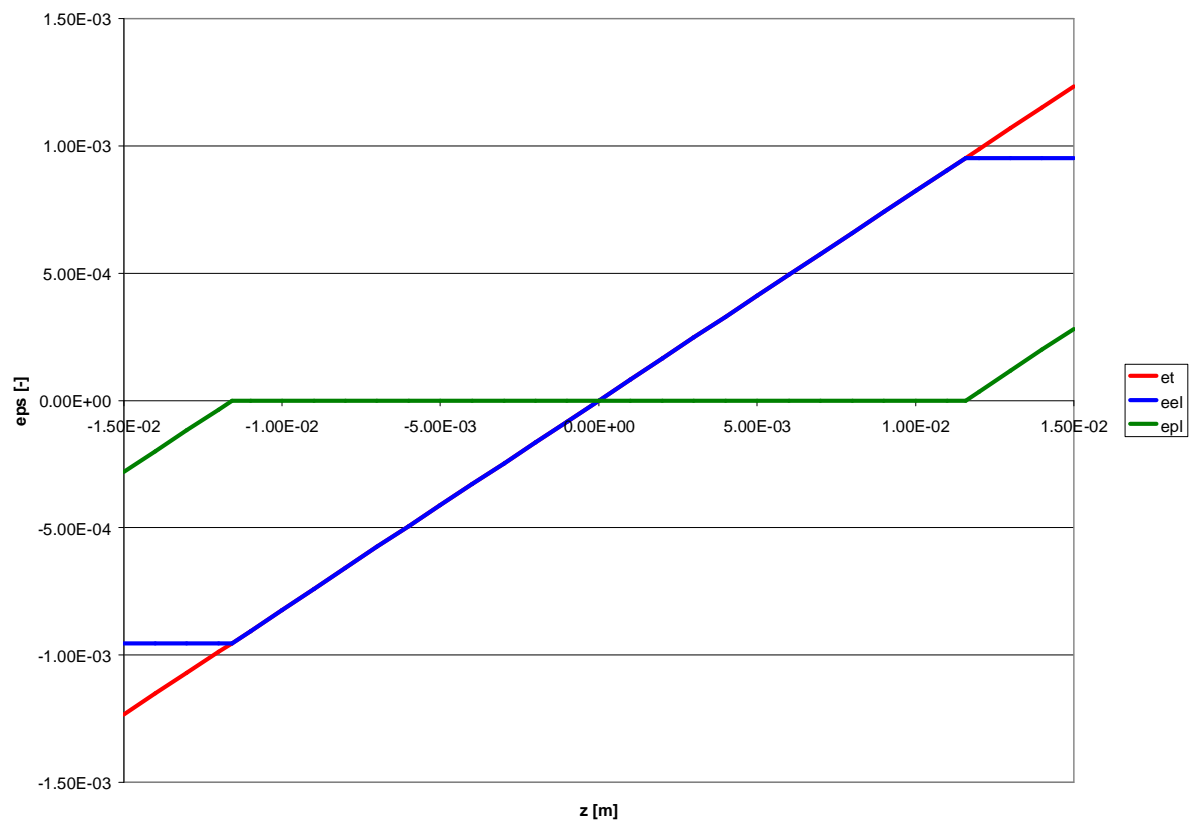


Obr. 17. Průběh přetvoření při odlehčení

Výsledky analytického řešení



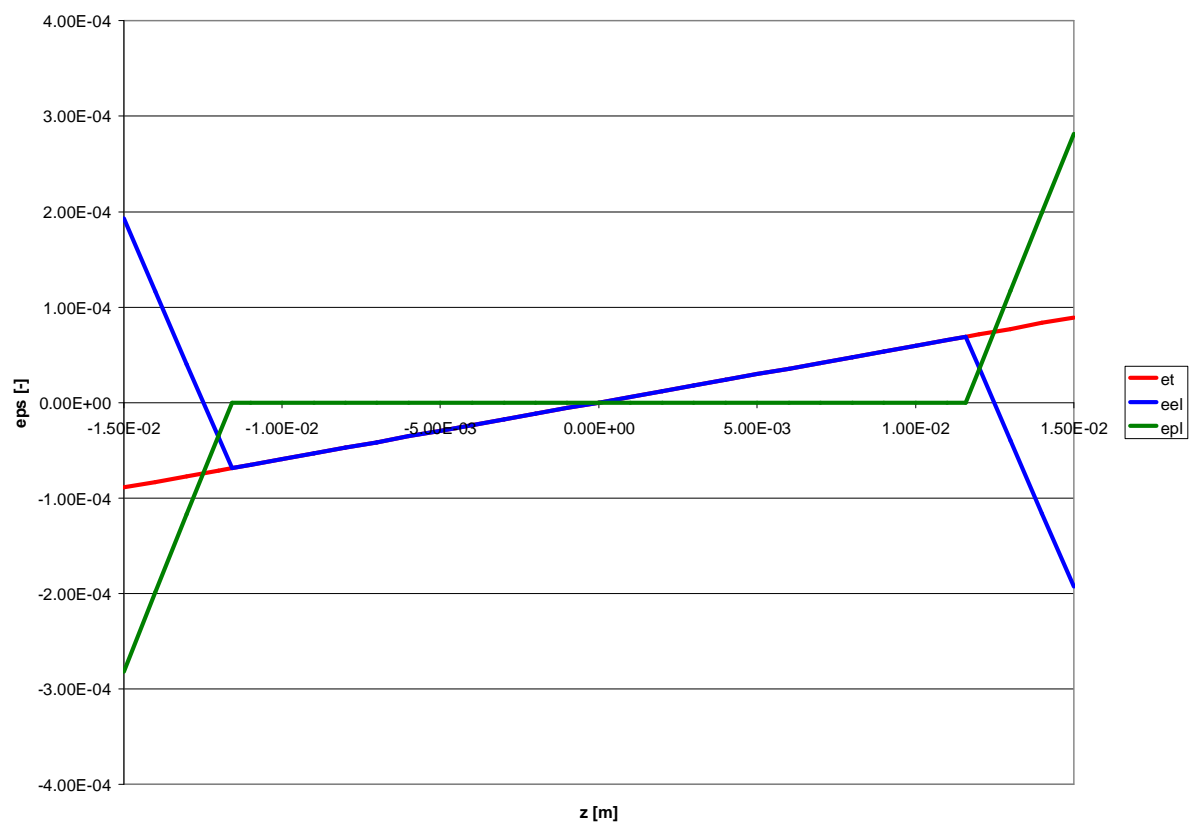
Obr. 18. Průběh napětí při zatížení



Obr. 19. Průběh přetvoření při zatížení



Obr. 20. Průběh napětí při odlehčení



Obr. 21. Průběh přetvoření při odlehčení