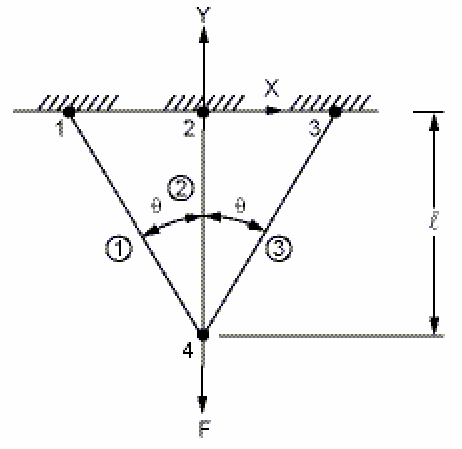
Modelování prutové soustavy namáhané tahem s plastizací

Odvození



Soustava tří prutů 1, 2, 3 je zatěžována silou $F = 50\ \text{kN}$. Délka svislého prutu je $l = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866\ \text{m}$. Úhel, který svírají šikmé pruty je $\theta = 30°$. Všechny pruty mají stejný průřez s plochou $S = 10^{-4}\ \text{m}^2$.

Materiál prutů je uvažován jako ideálně pružně-plastický s charakteristikami $E = 2{,}1 \cdot 10^{11}\ \text{Pa}$ a $\sigma_k = 200\ \text{MPa}$.

Ze statické rovnováhy v kloubu 4 platí:

$$F_x :\ -N_1 \cdot \sin\theta + N_3 \cdot \sin\theta = 0$$

$$F_y :\ N_2 + N_1 \cdot \cos\theta + N_3 \cdot \cos\theta - F = 0$$

Odtud:

$$N_3 = N_1$$

$$N_1 = \frac{F - N_2}{2 \cdot \cos\theta}$$

V pružném stavu je tato soustava staticky neurčitá, proto se síla N_2 počítá pomocí deformační podmínky:

$$u_B = \sum_{i=1}^{3} \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot S} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial N_2} = 2 \cdot \frac{N_1 \cdot \frac{l}{\cos\theta}}{E \cdot S} \cdot \left(-\frac{1}{2 \cdot \cos\theta} \right) + \frac{N_2 \cdot l}{E \cdot S} \cdot 1 = 0$$

$$u_B = 2 \cdot \frac{\frac{F - N_2}{2 \cdot \cos\theta} \cdot \frac{l}{\cos\theta}}{E \cdot S} \cdot \left(-\frac{1}{2 \cdot \cos\theta} \right) + \frac{N_2 \cdot l}{E \cdot S} = 0$$

$$u_B = \frac{N_2 - F}{2 \cdot \cos^3\theta} + N_2 = 0$$

$$N_2 = \frac{F}{1 + 2 \cdot \cos^3\theta}$$

$$N_1 = \frac{F \cdot \cos^2\theta}{1 + 2 \cdot \cos^3\theta}$$

Při zatěžování dojde nejprve k meznímu stavu pružnosti v prutu 2. Uvažujeme-li ideálně pružně-plastický materiál, je v tomto prutu napětí σ_k. Síla v prutech pak je

$$N_2 = \sigma_k \cdot S$$

$$N_1 = \frac{F - \sigma_k \cdot S}{2 \cdot \cos\theta}$$

Posuv uzlu 4 se určí:

$$u_F = \frac{\partial W}{\partial F} = 2 \cdot \frac{\frac{F - \sigma_k \cdot S}{2 \cdot \cos\theta} \cdot \frac{l}{\cos\theta}}{E \cdot S} \cdot \frac{1}{2 \cdot \cos\theta} + \frac{N_2 \cdot l}{E \cdot S} \cdot 0$$

$$u_F = \frac{\left(F - \sigma_k \cdot S\right) \cdot l}{2 \cdot E \cdot S \cdot \cos^3\theta}$$

Celkové přetvoření v prutu 2 ε_t, elastické přetvoření ε_{el} a plastické přetvoření ε_{pl} se určí:

$$\varepsilon_t = \frac{u_F}{l}$$

$$\varepsilon_{el} = \frac{\sigma_k}{E}$$

$$\varepsilon_{pl} = \varepsilon_t - \varepsilon_{el}$$

Další částí řešení je stav, v jakém se soustava bude nacházet po odlehčení. Vycházejme z předpokladu, že prut 2 zůstává prodloužen o délku

$$u_{pl} = l \cdot \varepsilon_{pl}$$

Z tohoto důvodu musí být v soustavě silové působení, které toto prodloužení vyváží. Soustava se opět uvažuje jako staticky neurčitá. Pro sílu v šikmých prutech platí:

$$N_1 = -\frac{N_2}{2 \cdot \cos\theta}$$

Deformační podmínka je:

$$u_B = \frac{\partial W}{\partial N_2} + u_{pl} = 0$$

$$u_B = 2 \cdot \frac{-\frac{N_2}{2\cdot\cos\theta} \cdot \frac{l}{\cos\theta}}{E \cdot S} \cdot \left(-\frac{1}{2 \cdot \cos\theta}\right) + \frac{N_2 \cdot l}{E \cdot S} \cdot 1 + u_{pl} = 0$$

$$u_B = \frac{N_2 \cdot l}{E \cdot S} \cdot \frac{1 + 2 \cdot \cos^3\theta}{2 \cdot \cos^3\theta} + u_{pl}$$

$$N_2 = -\frac{u_{pl} \cdot E \cdot S}{l} \cdot \frac{2 \cdot \cos^3\theta}{1 + 2 \cdot \cos^3\theta}$$

Posuv při odlehčení je:

$$u_{od} = \frac{N_2 \cdot l}{E \cdot S} + u_{pl}$$

Výsledky

Srovnávací výsledky byly vypočítány v ANSYSu, s použitím prvků LINK1.

PO ZATÍŽENÍ		
Veličina	**Analytické řešení**	**ANSYS**
N_1 [N]	17321	17321
N_2 [N]	20000	20000
u_F [m]	$0.95238 \cdot 10^{-3}$	$0.95237 \cdot 10^{-3}$
ε_t [-]	$1.09971 \cdot 10^{-3}$	–
ε_{el} [-]	$0.95238 \cdot 10^{-3}$	$0.952 \cdot 10^{-3}$
ε_{pl} [-]	$0.14733 \cdot 10^{-3}$	$0.147 \cdot 10^{-3}$
PO ODLEHČENÍ		
Veličina	**Analytické řešení**	**ANSYS**
N_1 [N]	1009.3	1009.5
N_2 [N]	– 1748.2	– 1748.5
u_{od} [m]	$0.55500 \cdot 10^{-4}$	$0.55507 \cdot 10^{-4}$